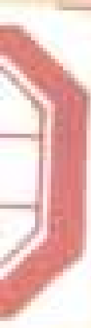


天元研究生数学丛书

# 高等概率论

程士宏　主编

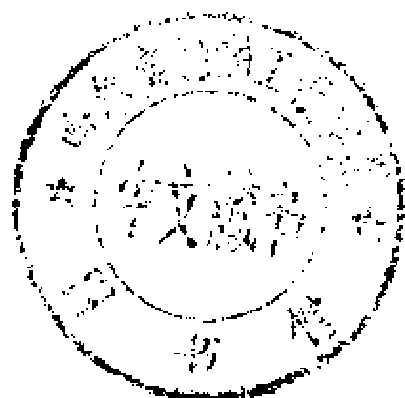


北京大学出版社

天元研究生数学丛书

# 高等概率论

程士宏 编著



北京大学出版社

北京

**图书在版编目(CIP)数据**

高等概率论/程士宏编著．—北京：北京大学出版社，1996.12
(天元研究生数学丛书)
ISBN 7-301-03318-4

Ⅰ.高… Ⅱ.程… Ⅲ.概率论 Ⅳ.O211

书　　名：**高等概率论**(天元研究生数学丛书)
著作责任者：程士宏　编著
责 任 编 辑：王明舟
标 准 书 号：ISBN 7-301-03318-4/O·389
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168 毫米　32 开本　11.875 印张　290 千字
1996 年 12 月第一版　1996 年 12 月第一次印刷
印　　数：0001—3,000 册
定　　价：20.00 元

# 《天元研究生数学丛书》编委会

# 内 容 简 介

本书主要讲授高等概率论的基本理论和方法，特别突出离散鞅的研究成果. 全书共分五章. 内容包括：概率论基础、离散鞅、Wiener 过程、弱收敛理论、强收敛理论等. 本书旨在架设从初等概率论的大学课程到现代概率论研究之间的桥梁，为读者进行深入研究打下坚实的基础. 本书选材精练，说理清楚，推导严谨，用通俗易懂的语言介绍了近代概率论中的研究成果，使读者尽快进入前沿研究领域.

本书可作为大学数学专业高年级本科生和研究生相关选修课的教材或参考书，也可供不专门从事概率统计研究的数学工作者阅读.

## 《天元研究生数学丛书》书目

(标△号者表示待出版)

1. 复变函数论选讲　　张南岳等编著
2. 近代分析引论　　苏维宜编著
3. 高等概率论　　程士宏编著
4. 复半单李代数引论△　　孟道骥编著
5. 群表示论△　　曹锡华等编著
6. 模形式讲义△　　陆洪文等编著

# 前　言

我国实行学位制度以来，研究生教育有了很大的发展。人们逐渐认识到：拓宽研究生的知识面是时代发展的需要。许多数学硕士点和博士点都要求在研究生阶段设立专业基础课程，使得不同专业、不同专题方向的研究生能对本专题以外的重要的、带基础性的近代发展也有所了解。

开设这类研究生专业基础课程的教材，当然是要介绍该方面的基本概念和基本方法。但在涉及近代的发展上不应过于专门，要照顾到各个不同分支的需要；也不能过于拘泥在技术细节上的推导，而是要在总体上、思想方法上给读者对该学科的主要内容有一个清晰的了解。因此在编写这类教材时，在深与广、精与粗、全貌与专题等方面要掌握适度才能使大多数来自不同专题方向的学生受益。

国内过去出版的大量为本科生编写的教材，因其没有反映近代的内容，不能满足需要，就是许多为研究生编写的教材，因其过分专门而不适用。可喜的是最近几年，出现了一批经这一段教学实践检验后符合上述要求的研究生专门基础课讲义。出版《天元研究生数学丛书》就是为了推动这类教材的编写，促进我国数学研究生培养水平的提高，希望得到数学界同仁们共同的关心和支持。

张恭庆

1995年3月于北京

# 序　言

本书是在1984—1988年向北大概率统计专业硕士研究生开设的概率论基础课的讲稿的基础上编写而成的.讲稿1987年曾油印成讲义，作为研究生教材沿用至今.

由于北大概率统计系的研究生一般都学过测度论，所以本书并不包含这部分内容，而只是在第一章用测度论的观点对概率论的基本概念作出严格的叙述.第二章集中讨论了离散鞅.本书的大部分内容贯穿着这样一种考虑：先得到关于鞅或鞅差的一般结论，再把这些一般结论特殊化到概率论的古典对象——独立随机变量.这样做可能有两方面的好处：第一，可以节省篇幅；第二，可以突出离散鞅研究在60年代末70年代初那一段时间的研究成果，更新课程的内容.这种考虑在第四章、第五章的某些地方不得不放弃.例如，讨论(弱)不变原理和强逼近的时候，我们把重点放在透彻地理解问题的提法而不是这些结果可以推广到什么程度.因此，在那里我们只对i.i.d.的情况进行了详尽的讨论，而对于它们的推广则吁请读者参阅书末的有关文献.在具体内容的讲法上，我们注意从文献资料上吸收好的想法.例如，Lindeberg-Feller中心极限定理(定理4.3.4)的证明取自于美国北卡罗来纳大学(University of North Carolina at Chapel Hill)统计系的概率论讲义.又例如关于非负随机变量级数收敛的定理5.1.1摘自1978年Chen发表在Annals of Probability上的一篇文章，关于重对数律的新证明(定理5.3.7)摘自于1982年Ascota发表在Annals of Probability上的一篇文章，等等.在讲授课程和编写教材的过程中，我们尽可能地将有些定理在形式上写得更一般些.例如，Lindeberg-

Feller 定理可以写成定理 4.3.5 那种形式;Skorokhod 嵌入定理也不必加上方差有限的条件(定理 3.4.5),等等.

本书的内容每周 4 学时,一个学期讲完,时间有点紧. 一般,我们能讲完不带 * 号的内容,而带 * 号的内容(4.1 小节除外)只介绍结论并解释其意义. 当然,如果每周能增加 2 学时,一个学期内讲完全部内容应该是不成问题的.

感谢数学天元项目基金的资助使本书得以正式出版. 在编写本书的过程中,使用过原讲义的蒋继明、祁永成等同志提出了许多宝贵意见,在此一并致谢.

在 1984 年酝酿开这个课的时候,当时北大数学系概率统计教研室的领导和同事们对我提出了两方面的要求:一是课程内容要现代化;二是要坚持严格的科学训练. 但是由于个人水平的限制,究竟在多大程度上能做到这两点就很难说了. 我衷心希望读者能对本书的缺点、错误提出批评意见.

程士宏

92.1.北京大学

# 目　录

# 第一章 概率论基础

初等概率论是建立在排列组合和微积分等数学方法的基础上的.在那里,虽然已经接触过事件、随机变量和数学期望等基本概念,但是,对这些基本概念却始终未能给出一个明确的定义.因此,奠定概率论的严格数学基础并把它作为数学的一个分支来研究是十分必要的.1933 年 Kolmogorov 的著作《概率论基础》被公认为是概率论公理系统完成的标志.按照 Kolmogorov 公理系统,概率论是以测度论为其数学基础的.本章我们就以测度论为工具,对概率论的基本概念作一个严格叙述.在概率论及其相关领域如随机过程和数理统计中,仅仅讨论随机变量是不够的,经常还要牵涉到取值于抽象空间特别是拓扑空间的随机变量——随机元.因此,在这一章中,还包括有距离可测空间及它上面的概率测度的内容.我们还讨论了概率论的最基本的概念之一——条件期望和条件概率.其中关于正则条件分布的存在性也是对取值于完备可分距离空间的随机元来证的.

## 第一节 概率论的基本概念

### 1.1 概率空间和随机元

设 $\Omega$ 是任一集合,$\mathscr{F}$ 是 $\Omega$ 的子集组成的 $\sigma$ 域,$P$ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度.在测度论中,$(\Omega,\mathscr{F})$称为可测空间,三位一体的$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为测度空间.

**定义 1.1.1** 测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$如果满足 $P(\Omega)=1$ 就称为

概率空间.

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,那么$\mathscr{F}$中之集合称为事件,$\Omega$称为必然事件,$P$称为概率测度.对$A\in\mathscr{F}$,$P(A)$称为事件$A$发生的概率.如果事件$A$发生的概率为1,我们便说$A$是几乎必然发生的,记成$A$ a.s..

给定集$\Omega$到集$X$的映射$\xi$.对任$B\subset X$,把

$$\xi^{-1}B=\{\omega\in\Omega;\xi(\omega)\in B\}$$

叫做$B$在映射$\xi$下的完全反像.对于$X$的子集所形成的集合系$\mathscr{B}$,记

$$\xi^{-1}\mathscr{B}=\{\xi^{-1}B;B\in\mathscr{B}\}.$$

当$\mathscr{B}$是一个$\sigma$域,我们称

$$\sigma(\xi)=\xi^{-1}\mathscr{B}$$

为使$\xi$成为到$(X,\mathscr{B})$的可测映射的最小$\sigma$域.换言之,$\xi$是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$到可测空间$(X,\mathscr{B})$的可测变换,当且仅当$\sigma(\xi)\subset\mathscr{F}$.如果$\xi$是测度空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(X,\mathscr{B})$的可测变换,则由

$$(P\xi^{-1})(B)=P(\xi^{-1}B),\quad B\in\mathscr{B} \tag{1.1.1}$$

在$\mathscr{B}$上定义的测度$P\xi^{-1}$称为$\xi$的导出测度.

**定义 1.1.2** 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(X,\mathscr{B})$的可测变换$\xi$称为定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$(X,\mathscr{B})$的随机元,$\xi$的导出测度$P\xi^{-1}$称为它的分布.

### 1.2 随机变量和分布函数

以$\boldsymbol{R}$记全体实数,以$\mathscr{R}$记$\boldsymbol{R}$中形如$(-\infty,x]$之集产生的$\sigma$域,即

$$\mathscr{R}=\sigma(\{(-\infty,x];x\in\boldsymbol{R}\}).$$

**定义 1.1.3** 定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$(\boldsymbol{R},\mathscr{R})$的随机元$\xi$称为这个概率空间上的随机变量(缩写为 r.v.);

$$F(x)=(P\xi^{-1})(-\infty,x]=P(\xi\leqslant x),\quad x\in\boldsymbol{R}$$

称为 r.v. $\xi$ 的分布函数(缩写为 d.f.);r.v. $\xi$ 的 d.f. 是 $F$,记成 $\xi \sim F$.

随机变量的 d.f. 决定了它的分布. 事实上,人们常把 $\boldsymbol{R}$ 上非降、右连续而且满足 $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ 和 $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$ 的函数叫做 $\boldsymbol{R}$ 上的 d.f.. 对于 $\boldsymbol{R}$ 上任一给定的 d.f. $F$,根据测度扩张定理,在 $(\boldsymbol{R},\mathscr{R})$ 上就有唯一的概率测度 $\mu$ 使得对每 $x\in\boldsymbol{R}$, $\mu(-\infty,x]=F(x)$,这个 $\mu$ 称为由 d.f. $F$ 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度(简写为 L-S 测度). 不难验证,r.v. 的 d.f. 是一个我们刚才所说的 $\boldsymbol{R}$ 上的 d.f.,而 r.v. 的 d.f. 产生的 L-S 测度则正好是这个 r.v. 的分布.

按测度论的说法,r.v. 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取有限值的可测函数. 记

$$\boldsymbol{R}^-=\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\};\quad \mathscr{R}^-=\sigma(\{[-\infty,x]:x\in\boldsymbol{R}^-\}).$$

在概率论中,可测函数则是从概率空间到 $(\boldsymbol{R}^-,\mathscr{R}^-)$ 的随机元. 顺便说一下,讨论可测函数时要牵扯到符号 $-\infty$, $\infty$ 和实数 $x$ 之间的运算,它们是这样规定的:

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty;$$

$$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty;\quad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty)=-\infty;$$

$$\frac{x}{\pm\infty}=0;\quad x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\begin{cases}\pm\infty, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \mp\infty, & x<0;\end{cases}$$

而诸如 $(\mp\infty)+(\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 这类的符号则无意义. 至于 $\boldsymbol{R}^-$ 中的序,我们约定: $-\infty<x<\infty$ 对每 $x\in\boldsymbol{R}$ 成立.

关于可测函数的一个重要事实是

**定理 1.1.1** 设 $(X,\mathscr{B})$ 是可测空间, $\xi$ 是从集 $\Omega$ 到集 $X$ 的映射,则 $f$ 是 $(\Omega,\xi^{-1}\mathscr{B})$ 上可测函数的充要条件是存在 $(X,\mathscr{B})$ 上的可测函数 $g$ 使

$$f(\omega)=g(\xi(\omega))$$

对一切 $\omega\in\Omega$ 成立；如果 $f$ 是有限值，上述 $g$ 也可取成是有限值的.

### 1.3 期望、方差

设 $\xi$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的可测函数. 以 $\xi^+$ 和 $\xi^-$ 记 $\xi$ 的正部和负部，如果

$$\min\left(\int_\Omega \xi^+\,\mathrm{d}P,\int_\Omega \xi^-\,\mathrm{d}P\right)<\infty,$$

那么 $\xi$ 的积分有意义，我们把它记作

$$E\xi=\int_\Omega \xi\mathrm{d}P, \tag{1.1.2}$$

并称 $E$ 为期望算子.

**定义 1.1.4** 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的可测函数 $\xi$ 如果满足 $E|\xi|<\infty$，就说它的期望存在，并把由(1.1.2)确定的 $E\xi$ 称为它的期望. 如果 $E\xi^2<\infty$，则

$$\mathrm{var}\xi=E(\xi-E\xi)^2$$

称为 $\xi$ 的方差.

求可测函数数学期望的有力工具是测度论中如下的积分变换公式.

**定理 1.1.2** 设 $\xi$ 是测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 的可测变换，$g$ 是 $(X,\mathscr{B})$ 上的可测函数，则下式在两端之一有意义时成立：

$$Eg(\xi)=\int_X g\mathrm{d}P\xi^{-1}. \tag{1.1.3}$$

### 1.4 重要不等式

概率论中要用到许多测度论中的不等式，我们把一些重要的列举备查. 其中的 Jensen 不等式条件有所放宽，故给予证明.

**引理 1.1.3** 对 $\boldsymbol{R}$ 上连续凸函数 $g$，存在 $\boldsymbol{R}$ 上实值非降函数 $h$，使对任 $x,y\in\boldsymbol{R}$，

$$g(y)-g(x)\geqslant h(x)(y-x) \tag{1.1.4}$$

成立；又当 $x\to\infty$ 时 $g(x)$ 的极限存在，记为 $g(\infty)$；当 $x\to-\infty$ 时 $g(x)$ 的极限存在，记为 $g(-\infty)$.

**证明** 对任 $\lambda\in(0,1)$ 和 $u<y$，有

$$g(\lambda u+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda g(u)+(1-\lambda)g(y).$$

若 $x<y$，取 $u<x$ 并在上式中令 $\lambda=(y-x)/(y-u)$，得

$$[g(x)-g(u)]/(x-u)\leqslant[g(y)-g(x)]/(y-x).$$

再令 $h(x)=\sup\limits_{u<x}[g(x)-g(u)]/(x-u)$，就进而得到

$$h(x)\leqslant[g(y)-g(x)]/(y-x),$$

即(1.1.4)对任何 $x<y$ 成立. 当 $y<x$ 时，由 $h$ 的定义本身知(1.1.4)仍成立；当 $y=x$ 时，(1.1.4)无条件成立. 因此，(1.1.4)对任 $x,y\in\boldsymbol{R}$ 成立.

如对每 $x\in\boldsymbol{R}$ 均有 $h(x)\leqslant0$，则由(1.1.4)易知 $g$ 非增，从而当 $x\to\infty$ 时 $g(x)$ 有极限. 如果存在 $x_0\in\boldsymbol{R}$ 使 $h(x_0)>0$，则由(1.1.4)又得 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$. 所以当 $x\to\infty$ 时 $g(x)$ 有极限. 类似可证，当 $x\to-\infty$ 时 $g(x)$ 亦有极限. 证完.

**定理 1.1.4**(Jensen 不等式) 设 $\xi$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的可测函数，$E\xi$ 有意义，$g$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上连续凸函数，$Eg(\xi)$ 有意义，则

$$Eg(\xi)\geqslant g(E\xi), \tag{1.1.5}$$

其中 $g(-\infty):=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$，$g(\infty):=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$.

**证明** 如果 $E|\xi|<\infty$，无妨设 $\xi$ 是 r.v.，这时于(1.1.4)中取 $y=\xi$，$x=E\xi$，便得

$$g(\xi)\geqslant g(E\xi)+h(E\xi)(\xi-E\xi).$$

两端再取期望即得(1.1.5).

如果 $E\xi=\infty$，可对(1.1.4)分两种情况讨论：

1) 对每 $x\in\boldsymbol{R}$,$h(x)\leqslant 0$. 此时 $g$ 非增,故

$$g(\xi)\geqslant g(\infty)=g(E\xi).$$

上式取期望便得(1.1.5).

2) 存在 $x_0\in\boldsymbol{R}$ 使 $h(x_0)>0$. 此时 $g(\infty)=\infty$. 于是,当 $P(\xi=\infty)>0$ 时,

$$Eg(\xi)\geqslant g(\infty)P(\xi=\infty)=\infty,$$

从而(1.1.5)成立. 当 $P(\xi=\infty)=0$ 时,

$$g(\xi)-g(x_0)\geqslant h(x_0)(\xi-x_0),$$

从而取期望后仍得 $Eg(\xi)=\infty$ 并由此推知(1.1.5).

对 $E\xi=-\infty$ 的情况,类似可证(1.1.5)成立. 这样就完成了定理的证明.

**定理 1.1.5**(Hölder 不等式) 设 $\xi,\eta$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数,实数 $p,q$ 满足 $1<p,q<\infty$ 和 $1/p+1/q=1$,则

$$E|\xi\eta|\leqslant(E^{1/p}|\xi|^p)(E^{1/q}|\eta|^q).\tag{1.1.6}$$

如果 $E|\xi|^p<\infty,E|\eta|^q<\infty$,则(1.1.6)的等号成立当且仅当 $\xi=0$ a.s. 或 $\eta=0$ a.s. 或存在 $C>0$ 使 $|\xi|^p=C|\eta|^q$ a.s..

设 $\zeta$ 是一个可测函数,$s<t$ 是正实数. 在(1.1.6)中取 $\xi=|\zeta|^s,\eta=1,p=t/s$ 和 $q=t/(t-s)$便得

$$\begin{aligned}E|\zeta|^s&=E\xi\eta\leqslant(E^{1/p}|\xi|^p)(E^{1/q}|\eta|^q)\\&=E^{1/p}|\zeta|^{sp}=E^{s/t}|\zeta|^t.\end{aligned}$$

这就是所谓的矩不等式.

**系 1.1.6**(矩不等式) 设 $s<t$ 是正实数. 对概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的任一可测函数 $\xi$,均有

$$E^{1/s}|\xi|^s\leqslant E^{1/t}|\xi|^t.\tag{1.1.7}$$

如果 $E|\xi|^t<\infty$,上式等号成立的充要条件是 $\xi$ 在 a.s. 意义下是一常数.

**定理 1.1.7**(Minkowski 不等式) 设 $\xi,\eta$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上两个 r.v..

1) 当 $p\geqslant 1$ 时，有

(1.1.8) $$E^{1/p}|\xi+\eta|^p\leqslant E^{1/p}|\xi|^p+E^{1/p}|\eta|^p.$$

如果$E(|\xi|^p+|\eta|^p)<\infty$，则等号成立当且仅当$p>1$时$\xi=0$ a.s. 或 $\eta=0$ a.s.或存在$C>0$ 使 $\xi=C\eta$ a.s.；$p=1$ 时，$\xi\eta\geqslant 0$ a.s.

2) 当 $0<p<1$ 时，有

(1.1.9) $$E|\xi+\eta|^p\leqslant E|\xi|^p+E|\eta|^p.$$

如果$E(|\xi|^p+|\eta|^p)<\infty$，则(1.1.9)的等号成立之充要条件是 $\xi\eta=0$ a.s..

设 $p\in(0,\infty)$. 我们把概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上满足 $E|\xi|^p<\infty$ 的 r.v. $\xi$ 组成之集合记作 $L_p(\Omega,\mathscr{F},P)$或简记作 $L_p$，并且认定 a.s. 意义下相等为 $L_p$ 中的相等，则下述结论成立：当 $p\geqslant 1$ 时，以 $\|\xi\|_p=E^{1/p}|\xi|^p$ 作为 $L_p$ 中元 $\xi$ 之模，$L_p$ 是一 Banach 空间；当 $0<p<1$时，以 $E|\xi-\eta|^p$ 作为 $L_p$ 中元 $\xi$ 和 $\eta$ 之距离，$L_p$ 就成为完备的距离空间. 由系 1.1.6 可见，概率空间上的 $L_p$ 空间具有性质：如 $0<s<t<\infty$，则 $L_s\supset L_t$.

### 1.5 随机变量序列的收敛

在概率论中，随机变量序列的各种收敛性的讨论历来是十分重要的课题. 这些收敛的概念实质上在测度论中都有，只不过所用的术语有所不同.

**定义 1.1.5** 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$称为 a.s. 收敛到可测函数 $\xi$，记作

$$\xi_n\rightarrow\xi \text{ a.s.},$$

如果 $P(\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi)=1$；r.v. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$称为依概率收敛到 r.v. $\xi$，记作

$$\xi_n\xrightarrow{P}\xi,$$

如对每 $\varepsilon>0$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon)=0$；r.v. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}\subset$

$L_p(0<p<\infty)$称为 $p$ 阶平均收敛到 r.v. $\xi\in L_p$，记作

$$\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi,$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n-\xi|^p=0$.

关于以上各种收敛的关系，有下列定理：

**定理 1.1.8** 对定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$和 r.v. $\xi$，

1）如 $\xi_n\to\xi$ a.s.，或存在 $0<p<\infty$使 $\xi_n\xrightarrow{L_p}\xi$，则 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$；

2）如 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$，则存在$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的子列$\{\xi_{n'}\}$使 $\xi_{n'}\to\xi$ a.s.

在讨论收敛性的时候，一个十分重要的问题是积分号下取极限的问题. 对此，我们可以引用单调收敛定理、Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理. 在这方面，一致可积性的概念有特别重要的作用.

**定义 1.1.6** 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v. 族$\{\xi_t,t\in T\}$如果满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{t\in T} E|\xi_t|I_{(|\xi_t|\geqslant\lambda)}=0, \tag{1.1.10}$$

则称之为一致可积的.

在(1.1.10)中，我们使用了一个以后也经常使用的符号 $I_A(\cdot)$. 设 $\Omega$ 是任一集合而 $A\subset\Omega$. 对每个 $\omega\in\Omega$，令

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\in A^C:=\Omega\backslash A,\end{cases}$$

并称之为 $\Omega$ 中集合 $A$ 的指示函数.

从一致可积的定义可见：有限个期望存在的 r.v. 组成的 r.v. 族是一致可积的；如果对于 r.v. 族$\{\xi_t,t\in T\}$，存在非负且期望存在的 r.v. $\xi$ 使 $|\xi_t|\leqslant\xi$ a.s. 对每个 $t\in T$ 成立，则它是一致可积的；如果 r.v. 族$\{\xi_t,t\in T\}$和$\{\eta_t,t\in T\}$都一致可积，那么对任何 $a,b\in\boldsymbol{R}$，$\{a\xi_t-b\eta_t,t\in T\}$也一致可积. 一致可积的一般判别方法如下.

**定理 1.1.9** 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上 r.v. 族$\{\xi_t,t\in T\}$一致可积的充要条件是

$$\sup_{t\in T}E|\xi_t|<\infty \tag{1.1.11}$$

并且对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使对一切满足 $P(A)<\delta$ 之 $A\in\mathscr{F}$ 均有

$$\sup_{t\in T}E|\xi_t|I_A<\varepsilon. \tag{1.1.12}$$

**证明** *充分性*:对任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta_\varepsilon>0$ 使对任何满足 $P(A)<\delta_\varepsilon$ 之 $A\in\mathscr{F}$,(1.1.12)成立.由(1.1.11)知,$\lambda_\varepsilon=\sup\limits_{t\in T}E|\xi_t|/\delta_\varepsilon<\infty$.于是,当 $\lambda>\lambda_\varepsilon$ 时,

$$P(|\xi_t|\geqslant\lambda)\leqslant E|\xi_t|/\lambda\leqslant\sup_{t\in T}E|\xi_t|/\lambda<\delta_\varepsilon,$$

从而 $E|\xi_t|I_{\{|\xi_t|\geqslant\lambda\}}<\varepsilon$ 对任何 $t\in T$ 成立,即

$$\sup_{t\in T}E|\xi_t|I_{\{|\xi_t|\geqslant\lambda\}}\leqslant\varepsilon.$$

因此,(1.1.11)和(1.1.12)蕴含一致可积性.

*必要性*:对任 $A\in\mathscr{F}$ 和 $\lambda>0$,我们有

$$\begin{aligned}\sup_{t\in T}E|\xi_t|I_A &=\sup_{t\in T}\left(E|\xi_t|I_{A\cap\{|\xi_t|<\lambda\}}+E|\xi_t|I_{A\cap\{|\xi_t|\geqslant\lambda\}}\right)\\ &\leqslant\lambda P(A)+\sup_{t\in T}E|\xi_t|I_{\{|\xi_t|\geqslant\lambda\}}.\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

如$\{\xi_t,t\in T\}$一致可积,在(1.1.13)中取 $A=\Omega$ 并让 $\lambda_0$ 充分大使 $\sup\limits_{t\in T}E|\xi_t|I_{\{|\xi_t|\geqslant\lambda_0\}}<1$,便得

$$\sup_{t\in T}E|\xi_t|\leqslant\lambda_0+1<\infty,$$

从而(1.1.11)成立.此外,对任给 $\varepsilon>0$,取 $\lambda_\varepsilon$ 充分大使 $\sup\limits_{t\in T}E|\xi_t|I_{\{|\xi_t|\geqslant\lambda_\varepsilon\}}<\varepsilon/2$ 并令 $\delta_\varepsilon=\varepsilon/(2\lambda_\varepsilon)$,则对任何 $A\in\mathscr{F}$,只要 $P(A)<\delta_\varepsilon$,(1.1.13)就给出

$$\sup_{t\in T}E|\xi_t|I_A\leqslant\lambda_\varepsilon P(A)+\varepsilon/2<\varepsilon.$$

这又证明了(1.1.12).定理证完.

下面,我们讨论一致可积性的应用.

**定理 1.1.10** 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$\{\xi_n,n\geqslant 1\}\subset L_p(\Omega,\mathscr{F},P)(0<p<\infty)$. 如果对$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v. $\xi$,$\xi_n\xrightarrow{P}\xi$,则下列三陈述等价:

1) $\{|\xi_n|^p,n\geqslant 1\}$一致可积;

2) $\xi\in L_p$ 且 $\xi_n\xrightarrow{L_p}\xi$;

3) $\xi\in L_p$ 且 $E|\xi_n|^p\to E|\xi|^p$.

**证明** 我们采用循环论证法.

1)$\Rightarrow$2):由于 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$,故存在$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的子列$\{\xi_{n'}\}$使 $\xi_{n'}\to\xi$ a.s.. 又由于$\{|\xi_n|^p,n\geqslant 1\}$一致可积,故 $\sup\limits_{n\geqslant 1}E|\xi_n|^p<\infty$. 于是利用 Fatou 引理便得

$$E|\xi|^p=E\lim_{n'\to\infty}|\xi_{n'}|^p\leqslant\liminf_{n'\to\infty}E|\xi_{n'}|^p\leqslant\sup_{n\geqslant 1}E|\xi_n|^p<\infty,$$

即 $\xi\in L_p$. 为证 $\xi_n\xrightarrow{L_p}\xi$,对任给 $\varepsilon>0$,我们利用 $C_r$ 不等式(见习题 1.1.13)得

$$\begin{aligned}E|\xi_n-\xi|^p&=E|\xi_n-\xi|^pI_{\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}}+E|\xi_n-\xi|^pI_{\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}}\\&\leqslant\varepsilon^p+2^{p-1}(E|\xi_n|^pI_{\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}}+E|\xi|^pI_{\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}}).\end{aligned}$$

由于 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ 和 $\xi\in L_p$,故

$$E|\xi|^pI_{\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}}\to 0;$$

由于 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$ 和$\{|\xi_n|^p,n\geqslant 1\}$一致可积,故

$$E|\xi_n|^pI_{\{|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon\}}\to 0.$$

于是我们有

$$\limsup_{n\to\infty}E|\xi_n-\xi|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

上式令 $\varepsilon\to 0$ 即得 $\xi_n\xrightarrow{L_p}\xi$.

2)$\Rightarrow$3):当 $0<p<1$ 时,由(1.1.9)得

$$E|\xi_n|^p \leqslant E|\xi_n - \xi|^p + E|\xi|^p;$$
$$E|\xi|^p \leqslant E|\xi_n - \xi|^p + E|\xi_n|^p.$$

因此 $\xi_n \xrightarrow{L_p} \xi$ 蕴含 $E|\xi_n|^p \to E|\xi|^p$. 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，在上面的推理中用(1.1.8)代替(1.1.9)，便可证得 $E^{1/p}|\xi_n|^p \to E^{1/p}|\xi|^p$，亦即 $E|\xi_n|^p \to E|\xi|^p$.

3)⇒1)：不难见 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ 蕴含着对任何满足 $P(|\xi|=\lambda)=0$ 之 $\lambda>0$，有

$$\xi_n I_{\{|\xi_n|<\lambda\}} \xrightarrow{P} \xi I_{\{|\xi|<\lambda\}}.$$

但 $\{|\xi_n I_{\{|\xi_n|<\lambda\}}|^p, n\geqslant 1\}$ 一致可积，故由已证之 1)⇒2)⇒3)，我们知对使 $P(|\xi|=\lambda)=0$ 之 $\lambda>0$ 有

$$E|\xi_n|^p I_{\{|\xi_n|\geqslant\lambda\}} \to E|\xi|^p I_{\{|\xi|\geqslant\lambda\}}.$$

这样，对任给 $\varepsilon>0$，取 $\lambda_\varepsilon>0$ 使 $P(|\xi|=\lambda_\varepsilon)=0$ 且 $E|\xi|^p I_{\{|\xi|\geqslant\lambda\}}<\varepsilon/2$，就存在 $n_0\geqslant 1$ 使 $n\geqslant n_0$ 时 $E|\xi_n|^p I_{\{|\xi_n|\geqslant\lambda_\varepsilon\}}<\varepsilon/2$，即

$$\sup_{n\geqslant n_0} E|\xi_n|^p I_{\{|\xi_n|\geqslant\lambda_\varepsilon\}} \leqslant \varepsilon/2.$$

对有限 r.v. 族 $\{|\xi_n|^p, 1\leqslant n<n_0\}$，再取 $\lambda'_\varepsilon>0$ 使

$$\sup_{1\leqslant n<n_0} E|\xi_n|^p I_{\{|\xi_n|\geqslant\lambda'_\varepsilon\}} < \varepsilon/2.$$

那么，当 $\lambda\geqslant\max(\lambda_\varepsilon,\lambda'_\varepsilon)$ 时便有

$$\sup_{n\geqslant 1} E|\xi_n|^p I_{\{|\xi_n|\geqslant\lambda\}} < \varepsilon.$$

这说明 $\{|\xi_n|^p, n\geqslant 1\}$ 一致可积. 证完.

## 1.6 乘积空间

设 $\{(X_i,\mathscr{B}_i), i=1,\cdots,n\}$ 是 $n$ 个可测空间. 令

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1,\cdots,x_n): x_i \in X_i, i=1,\cdots,n\};$$

$$\bigtimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i = \sigma\left( \left\{ \bigtimes_{i=1}^{n} B_i : B_i \in \mathscr{B}_i, i = 1, \cdots, n \right\} \right).$$

称 $\left( \bigtimes_{i=1}^{n} X_i, \bigtimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i \right)$ 为这 $n$ 个可测空间的乘积可测空间，形如 $\bigtimes_{i=1}^{n} B_i (B_i \in \mathscr{B}_i, i=1,\cdots,n)$ 之集称为 $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ 中的可测矩形.

设 $T$ 是任一无穷集，$\{(X_t, \mathscr{B}_t), t \in T\}$ 是一族可测空间. 令

$$\bigtimes_{t \in T} X_t = \{(x_t, t \in T): 对每 t \in T, x_t \in X_t\}.$$

对 $T$ 的非空子集 $S$，令

$$\pi_S(x) = (x_t, t \in S), \quad x = (x_t, t \in T) \in \bigtimes_{t \in T} X_t.$$

我们将把映射 $\pi_S$ 称为从 $\bigtimes_{t \in T} X_t$ 到 $\bigtimes_{t \in S} X_t$ 的投影映射. 设 $k \geqslant 1$，$\{t_1, \cdots, t_k\} \subset T$，$B \in \bigtimes_{i=1}^{k} \mathscr{B}_{t_i}$，形如 $\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k} B$ 的集合将被称为可测柱集. 包含一切可测柱集的最小 $\sigma$ 域称为乘积 $\sigma$ 域，记作 $\bigtimes_{t \in T} \mathscr{B}_t$，即

$$\bigtimes_{t \in T} \mathscr{B}_t = \sigma\left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\{t_1,\cdots,t_k\} \subset T} \left\{ \pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k} B : B \in \bigtimes_{i=1}^{k} \mathscr{B}_{t_i} \right\} \right).$$

不难验证：

$$\begin{aligned} \bigtimes_{t \in T} \mathscr{B}_t &= \sigma\left( \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\{t_1,\cdots,t_k\} \subset T} \left\{ \pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}\left( \bigtimes_{i=1}^{k} B_i \right) : B_i \in \mathscr{B}_{t_i}, i = 1, \cdots, k \right\} \right) \\ &= \sigma\left( \bigcup_{t \in T} \pi_t^{-1} \mathscr{B}_t \right). \end{aligned}$$

通常，形如 $\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k}\left( \bigtimes_{i=1}^{k} B_i \right) (B_i \in \mathscr{B}_{t_i}, i = 1, \cdots, k; \{t_1, \cdots, t_k\} \subset T; k \geqslant 1)$ 之集称为可测矩形柱集. 因此，乘积 $\sigma$ 域是包含一切可测矩形柱集的最小 $\sigma$ 域，也是使得每一个 $\pi_t (t \in T)$ 都是可测变换的最小 $\sigma$ 域. 以 $\mathscr{N}$ 记 $T$ 的全体可数子集. 关于乘积 $\sigma$ 域的结构，还有下列重要事实：

$$(1.1.14)\qquad \bigtimes_{t\in T}\mathscr{B}_t=\bigcup_{S\in\mathscr{N}}\pi_S^{-1}\Big(\bigtimes_{t\in S}\mathscr{B}_t\Big).$$

如果对每 $t\in T$，均有 $(X_t,\mathscr{B}_t)=(X,\mathscr{B})$，我们将把 $\Big(\bigtimes_{t\in T}X_t,\bigtimes_{t\in T}\mathscr{B}_t\Big)$ 记成 $(X^T,\mathscr{B}^T)$. 特别地，$n$ 个 $(X,\mathscr{B})$ 的乘积空间记作 $(X^n,\mathscr{B}^n)$，可数个 $(X,\mathscr{B})$ 的乘积空间记作 $(X^\infty,\mathscr{B}^\infty)$.

乘积空间上测度的产生是一个比较复杂的问题. 这里，我们把测度论中的 Tulcea 定理引述于下. 为了行文简便，我们将不加声明地以 $N$ 表示有限集 $\{1,\cdots,n\}$ ($n\geqslant 1$ 是一整数)或可数集 $\{1,2,\cdots\}$.

**定义 1.1.7** 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 和 $(X,\mathscr{B})$ 是两个可测空间. 定义在 $\mathscr{B}\times\Omega$ 上的实函数 $P$ 称为是从 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(X,\mathscr{B})$ 的概率转移函数，如对每 $\omega\in\Omega$，$P(\cdot,\omega)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的概率测度，对每 $B\in\mathscr{B}$，$P(B,\cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 可测函数. 设 $\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in N\}$ 是一族可测空间. 如果 $P_1$ 是 $(X_1,\mathscr{B}_1)$ 上的概率测度，对每 $k\in N$，$k>1$，$P_k$ 是 $\Big(\bigtimes_{i=1}^{k-1}X_i,\bigtimes_{i=1}^{k-1}\mathscr{B}_i\Big)$ 到 $(X_k,\mathscr{B}_k)$ 的概率转移函数，那么称 $\{P_k,k\in N\}$ 是这族可测空间上的概率转移函数族.

**定理 1.1.11**(Tulcea) 如在可测空间族 $\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in N\}$ 上给定了概率转移函数族 $\{P_k,k\in N\}$，则在乘积空间 $\Big(\bigtimes_{k\in N}X_k,\bigtimes_{k\in N}\mathscr{B}_k\Big)$ 有唯一概率测度 $P$ 使

$$\begin{aligned}(1.1.15)\qquad (P\pi_{1,\cdots,k}^{-1})(B_1\times\cdots\times B_k)&=\int_{B_1}P_1(\mathrm{d}x_1)\int_{B_2}P_2(\mathrm{d}x_2,x_1)\\&\quad\times\cdots\int_{B_k}P_k(\mathrm{d}x_k;x_1,\cdots,x_{k-1})\end{aligned}$$

对每 $k\in N$ 和每 $B_i\in\mathscr{B}_i$，$i=1,\cdots,k$ 成立.

如果对每 $k\in N$，$P_k$ 是 $(X_k,\mathscr{B}_k)$ 上的概率测度，那么不难验证，$\{P_k,k\in N\}$ 是 $\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in N\}$ 上的概率转移函数族. 因此，

作为 Tulcea 定理的推论，有

**定理 1.1.12**(Fubini) 对任意 $n$ 个概率空间$(X_k,\mathscr{B}_k,P_k)$，$k=1,\cdots,n$，在 $\left(\bigtimes_{k=1}^{n}X_k,\bigtimes_{k=1}^{n}\mathscr{B}_k\right)$ 上存在唯一的概率测度 $P=:\bigtimes_{k=1}^{n}P_k$ 使对每非负 $\bigtimes_{k=1}^{n}\mathscr{B}_k$ 可测函数 $f$ 和 $1,\cdots,n$ 的每一排列 $i_1,\cdots,i_n$，均有

$$(1.1.16)\qquad \int f\mathrm{d}P=\int_{X_{i_1}}P_{i_1}(\mathrm{d}x_{i_1})\int_{X_{i_2}}P_{i_2}(\mathrm{d}x_{i_2})\times\cdots\int_{X_{i_n}}f(x_1,\cdots,x_n)P_{i_n}(\mathrm{d}x_{i_n}).$$

当然，对(1.1.16)只有这样解释才是有意义的：第一，对每 $1<k<n$，$\int_{X_{i_k}}P_{i_k}(\mathrm{d}x_{i_k})\cdots\int_{X_{i_n}}f(x_1,\cdots,x_n)P_{i_n}(\mathrm{d}x_{i_n})$ 是 $\bigtimes_{m=1}^{k-1}\mathscr{B}_{i_m}$ 可测函数；第二，(1.1.16)的等号成立. 对(1.1.15)亦应如此理解.

Tulcea 定理表明，概率转移函数族唯一决定了乘积空间上的概率测度. 反过来，一个自然而有意义的问题是：如果在乘积空间 $\left(\bigtimes_{k\in N}X_k,\bigtimes_{k\in N}\mathscr{B}_k\right)$ 上给定了一个概率测度 $P$，那么是否有$\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in N\}$上的概率转移函数族$\{P_k,k\in N\}$使得(1.1.15)成立？这个问题的回答与诸空间 $X_k,k\in N$ 的拓扑性质有关，将在第四节讨论.

### 1.7 随机向量和随机过程

当我们讨论取值于乘积可测空间的随机元时，常需引用下列事实：

**定理 1.1.13** 设$\{(X_t,\mathscr{B}_t):t\in T\}$是一族可测空间，则 $\xi=\{\xi_t,t\in T\}$是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$到 $\left(\bigtimes_{t\in T}X_t,\bigtimes_{t\in T}\mathscr{B}_t\right)$ 的可测变换当且

仅当对每 $t\in T$，$\xi_t$ 是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(X_t,\mathscr{B}_t)$的可测变换.

设 $n$ 是一正整数. 考虑乘积空间$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{R}^n)$. 我们把 $\mathscr{R}^n$ 中之集称为 Borel 集，把$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{R}^n)$上的可测函数称为 Borel 可测函数.

**定义 1.1.8** 从概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\boldsymbol{R}^n,\mathscr{R}^n)$的随机元 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$称为 $n$ 维随机向量，而

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P\xi^{-1}\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{n}(-\infty,x_i]\Big)$$

$$=P(\xi_i\leqslant x_i,i=1,\cdots,n),\quad x_1,\cdots,x_n\in\boldsymbol{R}$$

则称为该随机向量的 d.f.. 随机向量 $\xi$ 的 d.f. 是 $F$，记成 $\xi\sim F$.

和 r.v. 的情形一样，随机向量的 d.f. 也决定了它的分布. 对 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,\cdots,b_n)\in\boldsymbol{R}^n$，我们将用 $a\leqslant b$ 和 $a<b$ 来分别表示 $a_k\leqslant b_k$，$k=1,\cdots,n$ 和 $a_k<b_k$，$k=1,\cdots,n$. 又记

$$(a,b]=\{x\in\boldsymbol{R}^n,a<x\leqslant b\}.$$

此外，对每 $a=(a_1,\cdots,a_n)$，$b=(b_1,\cdots,b_n)\in\boldsymbol{R}^n$ 和 $\boldsymbol{R}^n$ 上的实值函数 $F$，我们记

$$\mu_F(a,b]=\sum_c(-1)^{n-r(c)}F(c_1,\cdots,c_n),$$

其中 $\sum\limits_c$ 表示对一切这样的 $c=(c_1,\cdots,c_n)\in\boldsymbol{R}^n$ 求和，它的每一个分量 $c_k$ 或者是 $a_k$ 或者是 $b_k$，而求积号内的 $r(c)$是 $c_k=b_k$ 的 $k$ 的个数，即

$$r(c)=\#\{k:1\leqslant k\leqslant n,c_k=b_k\}.$$

我们将称 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数 $F$ 为一个 d.f.，如 $F$ 对每个自变量右连续，

$$\lim_{x_k\to-\infty}F(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\cdots,x_n)=0,\quad k=1,\cdots,n,$$

$$\lim_{x_1,\cdots,x_n\to\infty}F(x_1,\cdots,x_n)=1,$$

并且对每 $a,b\in\boldsymbol{R}^n$，$a<b$，均有

$$\mu_F(a,b]\geqslant 0.$$

不难验证，随机向量的 d.f. 是一个我们刚才所定义的 d.f.. 而一

个随机向量 $\xi$ 的 d.f. $F$ 产生的 L-S 测度 $\mu_F$ 就是 $\xi$ 的分布.

从定理 1.1.13 可见,一个 $n$ 维随机向量也就是 $n$ 个随机变量. 把这个概念一般化,我们就得到了随机过程的定义.

**定义 1.1.9** 设 $T$ 是一个无穷集,概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一族 r.v. $\xi=\{\xi_t,t\in T\}$称为一个随机过程. 对每 $n\geqslant 1$,$\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$,随机向量$(\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})$的 d.f. $F_{t_1,\cdots,t_n}$称为 $\xi$ 的一个有限维的边缘分布. 随机过程的有限维边缘分布的全体

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}:\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T,n\geqslant 1\}$$

称为它的有限维 d.f. 族.

特别地,当 $T=\{1,2,\cdots\}$时,我们称随机过程$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$为一个随机变量序列.

在讨论一族 r.v. 的时候,常常要用协方差和相关系数来描述两个 r.v. 之间的关系. 设 r.v. $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 满足 $E\xi_1^2<\infty$和 $E\xi_2^2<\infty$,它们的协方差定义为

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=E(\xi_1-E\xi_1)(\xi_2-E\xi_2),$$

它们的相关系数定义为

$$\rho(\xi_1,\xi_2)=\frac{\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)}{(\operatorname{var}\xi_1)^{1/2}(\operatorname{var}\xi_2)^{1/2}}.$$

### 1.8 典型方法

在证明测度论的命题时,经常采用所谓典型方法,现归纳于下以便引用. 我们称集 $\Omega$ 的子集组成之集合系 $\mathscr{M}$ 为一个单调系,如果对于满足 $A_1\subset A_2\subset\cdots$或 $A_1\supset A_2\supset\cdots$的$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{M}$,分别有 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n:=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n:=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{M}$. 典型方法之一是

**定理 1.1.14**(单调系方法) 设 $\mathscr{A}$ 是 $\Omega$ 的子集组成之域,$\mathscr{M}$ 是 $\Omega$ 的子集组成之单调系. 如果 $\mathscr{M}\supset\mathscr{A}$,则 $\mathscr{M}\supset\sigma(\mathscr{A})$.

$\Omega$ 上的集合系 $\mathscr{E}$ 称为 $\pi$ 系，如 $A,B\in\mathscr{E}$ 蕴含 $A\cap B\in\mathscr{E}$. $\Omega$ 上的集合系 $\mathscr{T}$ 称为 $\lambda$ 系，如果它满足：1) $\Omega\in\mathscr{T}$；2) $A,B\in\mathscr{T}$，$A\supset B$ 蕴含 $A\setminus B\in\mathscr{T}$；3) $A_n\in\mathscr{T}$，$n\geq 1$ 且 $A_1\subset A_2\subset\cdots$ 蕴含 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{T}$. 第二个典型方法的依据是

**定理 1.1.15**（$\lambda$ 系方法） 设 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{T}$ 分别是 $\Omega$ 上的 $\pi$ 系和 $\lambda$ 系. 如 $\mathscr{T}\supset\mathscr{E}$，则 $\mathscr{T}\supset\sigma(\mathscr{E})$.

以上是关于集合之典型方法，我们还有关于函数的典型方法. 称集 $\Omega$ 上的非负函数族 $\mathscr{K}$ 为一个单调族，如果它满足：1) $f_1,f_2\in\mathscr{K}$，$c_1,c_2\geq 0$ 蕴含 $c_1f_1+c_2f_2\in\mathscr{K}$；2) $\mathscr{K}$ 中非降序列的极限亦属于 $\mathscr{K}$.

**定理 1.1.16** 设 $\mathscr{F}$ 是 $\Omega$ 上的 $\sigma$ 域，又 $\Omega$ 上的函数族 $\mathscr{K}$ 是单调族. 如对每 $A\in\mathscr{F}$ 均有 $I_A\in\mathscr{K}$，则对任一非负 $\mathscr{F}$ 可测函数 $f$，亦有 $f\in\mathscr{K}$.

我们称定理 1.1.16 为关于函数的单调族方法. 下面再说明关于函数的 $\lambda$ 族方法. 集 $\Omega$ 上定义的非负函数组成之集 $\mathscr{L}$ 称为一个 $\lambda$ 族，如果它满足：1) $I_\Omega\in\mathscr{L}$；2) $\mathscr{L}$ 中非降序列的极限函数属于 $\mathscr{L}$；3) $f_1,f_2\in\mathscr{L}$，$c_1,c_2\in\boldsymbol{R}$ 且 $c_1f_1+c_2f_2\geq 0$，则 $c_1f_1+c_2f_2\in\mathscr{L}$.

**定理 1.1.17** 设 $\mathscr{E}$ 是 $\Omega$ 上的 $\pi$ 系，又 $\Omega$ 上的函数族 $\mathscr{L}$ 是一个 $\lambda$ 族. 如果对每 $A\in\mathscr{E}$ 均有 $I_A\in\mathscr{L}$，则对每一非负 $\sigma(\mathscr{E})$ 可测函数 $f$，亦有 $f\in\mathscr{L}$.

## 1.9 独立性

下面，我们讨论经典概率论最基本、最重要的概念之一——独立性.

**定义 1.1.10** 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中的一族事件 $\{A_t,t\in T\}$ 称为是独立的，如对每 $n>1$，每 $\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，均有

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_{t_i}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(A_{t_i});$$

一族事件系$\{\mathscr{E}_t \subset \mathscr{F}, t\in T\}$称为是独立的，如对每$t\in T$，任取$A_t \in \mathscr{E}_t$，事件族$\{A_t, t\in T\}$是独立的；一族随机元$\{\xi_t, t\in T\}$称为是独立的，如$\sigma$域族$\{\sigma(\xi_t), t\in T\}$是独立的.

设$T$是任一集，我们称$\{T_i, i\in I\}$是$T$的一个分割，如对任$i, j\in I, i\neq j$均有$T_i\cap T_j=\varnothing$而且$\bigcup_{i\in I} T_i = T$.

**定理 1.1.18** 如一族$\pi$系$\{\mathscr{E}_t \subset \mathscr{F}, t\in T\}$独立，则对$T$的任一分割$\{T_i, i\in I\}$，$\sigma$域族$\Big\{\sigma\Big(\bigcup_{t\in T_i}\mathscr{E}_t\Big), i\in I\Big\}$独立.

**证明** 对每$i\in I$，令

$$\mathscr{G}_i = \Big\{\bigcap_{k=1}^{n} A_k : A_k \in \mathscr{E}_{t_k}, k=1,\cdots,n; \{t_1,\cdots,t_n\}\subset T_i; n\geqslant 1\Big\}.$$

易见$\{\mathscr{G}_i, i\in I\}$是独立的$\pi$系族. 由于$\bigcup_{t\in T_i}\mathscr{E}_t \subset \mathscr{G}_i$对每$i\in I$成立，故为证$\Big\{\sigma\Big(\bigcup_{t\in T_i}\mathscr{E}_t\Big), i\in I\Big\}$独立，只需证$\{\sigma(\mathscr{G}_i), i\in I\}$独立. 而据定义，为证$\{\sigma(\mathscr{G}_i), i\in I\}$独立，又只需证对每$n>1$，每$i_1,\cdots,i_n\in I$，$\{\sigma(\mathscr{G}_{i_k}), k=1,\cdots,n\}$独立. 令

$$\mathscr{G} = \Big\{A_1 \in \mathscr{F}: 对任 A_k \in \mathscr{G}_{i_k}, k=2,\cdots,n, 有$$
$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)\Big\}.$$

不难验证$\mathscr{G}$是一个$\lambda$系且$\mathscr{G}\supset\mathscr{G}_{i_1}$. 因此由定理 1.1.15 知$\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{G}_{i_1})$. 这证明了$\{\sigma(\mathscr{G}_{i_1}), \mathscr{G}_{i_2}, \cdots, \mathscr{G}_{i_n}\}$独立. 对$\pi$系$\{\sigma(\mathscr{G}_{i_1}), \mathscr{G}_{i_2}, \cdots, \mathscr{G}_{i_n}\}$用同样手段又可证$\{\sigma(\mathscr{G}_{i_1}), \sigma(\mathscr{G}_{i_2}), \mathscr{G}_{i_3}, \cdots, \mathscr{G}_{i_n}\}$独立. 这样的手段使用$n$次即证得$\{\sigma(\mathscr{G}_{i_k}), k=1,\cdots,n\}$独立，从而完成定理的证明.

容易利用上述定理得到下列两个推论.

**系 1.1.19** 如对每 $t\in T$，$\xi_t$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(X_t,\mathscr{B}_t)$ 的随机元，$\mathscr{E}_t$ 是一个使 $\sigma(\mathscr{E}_t)=\mathscr{B}_t$ 的 $\pi$ 系，则 $\{\xi_t,t\in T\}$ 独立当且仅当对每 $n>1$，每 $\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$ 和每 $A_i\in\mathscr{E}_{t_i}$，$i=1,\cdots,n$，有

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\xi_{t_i}^{-1}A_i\Big)=\prod_{i=1}^{n}P(\xi_{t_i}^{-1}A_i).$$

**系 1.1.20** 设 $\{\xi_t,t\in T\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上一族 r.v.，对每 $t\in T$，$\xi_t\sim F_t$. 下列命题等价：

1) $\{\xi_t,t\in T\}$ 独立；

2) 对每 $n>1$，$\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，

$$P(\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})^{-1}=\mathop{\times}_{i=1}^{n}P\xi_{t_i}^{-1};$$

3) 对每 $n>1$，$\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，$(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$，

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{t_i}(x_i),$$

其中 $F_{t_1,\cdots,t_n}$ 记 $(\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})$ 的 d.f.；

4) 对每 $n>1$，$\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，$n$ 维 Borel 可测函数 $f$，下式

$$Ef(\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n})=\int\cdots\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}F_{t_1}(x_1)\cdots\mathrm{d}F_{t_n}(x_n)$$

只要有一端有意义就成立.

当 1)—4)之一成立时，有

5) 对每 $n>1$，$\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，如 $E|\xi_{t_i}|<\infty$，$i=1,\cdots,n$，则 $E|\xi_{t_1}\cdots\xi_{t_n}|<\infty$ 且

$$E\prod_{i=1}^{n}\xi_{t_i}=\prod_{i=1}^{n}E\xi_{t_i};$$

如 $E\xi_{t_i}^2<\infty$，$i=1,\cdots,n$，则

$$\operatorname{var}\sum_{i=1}^{n}\xi_{t_i}=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}\xi_{t_i}.$$

## 1.10 Borel-Cantelli 引理

设$\{A_n, n\geqslant 1\}$是$\Omega$的一列子集，则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

在集合论中称为$\{A_n, n\geqslant 1\}$的上极限. 如$\{A_n, n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的事件列，则上极限的意思是事件列$\{A_n, n\geqslant 1\}$中有无穷多个事件发生. 因此，在概率论中记

$$\{A_n, \text{i.o.}\} = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

(i.o. 是 infinitely often 的缩写). 类似地，记

$$\{A_n, \text{f.o.}\} = \{A_n, \text{i.o.}\}^c$$

(f.o. 是 finitely often 的缩写). 概率论中一个证明比较简单而应用十分广泛的事实是下列 Borel-Cantelli 引理.

**定理 1.1.21** 设$\{A_n, n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的事件列. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty, \tag{1.1.17}$$

则

$$P(A_n, \text{i.o.}) = 0; \tag{1.1.18}$$

如果$\{A_n, n\geqslant 1\}$相互独立而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty, \tag{1.1.19}$$

则

$$P(A_n, \text{i.o.}) = 1. \tag{1.1.20}$$

**证明** 如果(1.1.17)成立，我们有

$$P(A_n, \text{i.o.}) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0,$$

因而(1.1.18)成立.

设$\{A_n,n\geqslant1\}$独立且(1.1.19)成立. 利用不等式

$$e^{-x}\geqslant1-x,\quad x\geqslant0,$$

我们得

$$1-P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Big)=P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c\Big)=\prod_{k=n}^{\infty}[1-P(A_k)]$$

$$\leqslant\prod_{k=n}^{\infty}e^{-P(A_k)}=e^{-\sum\limits_{k=n}^{\infty}P(A_k)}=0,\quad n\geqslant1,$$

因而

$$P(A_n,\text{i.o.})=P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Big)=\lim_{n\to\infty}P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Big)=1,$$

即(1.1.20)成立. 证完.

以上我们在测度论的观点下讨论了概率论的基本概念，重温了测度论的一些重要事实. 希望读者能根据本章建立的测度论与概率论的联系，在今后的学习中，灵活地运用测度论的知识.

### 习　题　1.1

1. 若 r.v. $\xi$ 的方差存在，对任何实数 $a$，令

$$\xi_a=\begin{cases}\xi, & \xi\leqslant a;\\ a, & \xi>a.\end{cases}$$

证明：$\operatorname{var}\xi_a\leqslant\operatorname{var}\xi$.

2. 证明 r.v. $\xi$ 的期望存在当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi|\geqslant n)<\infty.$$

3. 证明 $L_1$ 中任一有限 r.v. 族是一致可积的.

4. 设$\{\xi_t,t\in T\}$是一族 r.v.. 证明：如果存在非负 r.v. $\xi\in L_1$ 使对每 $t\in T$，$|\xi_t|\leqslant\xi$　a.s.，则$\{\xi_t,t\in T\}$一致可积.

5. 证明：如存在 $\alpha>0$ 使 $\sup\limits_{t\in T}E|\xi_t|^{1+\alpha}<\infty$，则 r.v. 族$\{\xi_t,t\in T\}$一致可积.

6. 如果 $x\in\mathbf{R}$ 满足 $P(\xi=x)=0$，则称 $x$ 为 r.v. $\xi$ 的连续点. 如果对 r.v. $\xi$ 的每一个连续点 $x$，均有

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n\leqslant x)=P(\xi\leqslant x),$$

则称 r.v. 序列 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 依分布收敛到 r.v. $\xi$，记成 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$. 证明

(1) 如 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$，则 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$；

(2) 如 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$ 且存在 $a\in\mathbf{R}$ 使 $P(\xi=a)=1$，则 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$；

(3) 如 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$，则对 $\xi$ 的每一个连续点 $x$ 有 $I_{\{\xi_n\leqslant x\}}\xrightarrow{P}I_{\{\xi\leqslant x\}}$ 和 $I_{\{\xi_n>x\}}\xrightarrow{P}I_{\{\xi>x\}}$.

7. 设 $L_1$ 中的非负 r.v. $\xi$ 和 $\xi_n,n\geqslant1$ 满足 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$ 和 $E\xi_n\to E\xi$. 证明 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 一致可积.

8. 设非负 r.v. 列 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 满足 $E\xi_n\to0$，证明 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 一致可积.

9. 设 r.s. 列 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 满足下列条件：

(1) $\{\xi_n^-,n\geqslant1\}$ 一致可积；

(2) $E\liminf\limits_{n\to\infty}\xi_n$ 有意义.

证明：$E\liminf\limits_{n\to\infty}\xi_n\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}E\xi_n$.

10. 设 r.v. 列 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 满足下列条件：

(1) 存在 $\eta\in L_1$ 使 $|\xi_n|\leqslant\eta$ a.s.；

(2) 对某 r.v. $\xi$，$\xi_n\xrightarrow{P}\xi$.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}E\xi_n=E\xi$.

11. 如果 $\eta_n\xrightarrow{P}0$，$\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 一致可积，证明 $\xi_n\eta_n\xrightarrow{P}0$.

12. 设 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 $\mathscr{F}$ 的非降子 $\sigma$ 域列，即对每 $n\geqslant1$，$\mathscr{F}_n$ 是 $\Omega$ 的子集构成的 $\sigma$ 域，且

$$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2\subset\cdots\subset\mathscr{F}.$$

记 $\mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right)$. 证明:对任一 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的 r.v. $\eta$,存在 r.v. 列 $\{\eta_n,n\geqslant 1\}$ 使

(1) 对每 $n\geqslant 1$, $\eta_n$ 关于 $\mathscr{F}_n$ 可测;

(2) $\eta_n\xrightarrow{P}\eta$.

13. 证明 $C_r$ 不等式:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是 r.v., $r>0$. 令

$$C_r=\begin{cases}1, & 0<r\leqslant 1,\\ n^{r-1}, & r>1,\end{cases}$$

则 $E\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right|^r\leqslant C_r\sum_{i=1}^{n}E|\xi_i|^r$.

14. 证明广义 Chebyshev 不等式:设 $\xi$ 是 r.v., $g$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上非负 Borel 可测函数. 如果 $g$ 是偶函数且在 $[0,\infty)$ 非降,则对任给 $\varepsilon>0$

$$P(|\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant Eg(\xi)/g(\varepsilon).$$

15. 证明:r.v. $\xi$ 和 $\eta$ 的相关系数 $\rho(\xi,\eta)=\pm 1$ 当且仅当存在 $a\neq 0,b\in\boldsymbol{R}$ 使 $\eta=a\xi+b$ a.s..

16. 设 $\{\xi_t,t\in T\}$ 是独立 r.v. 族. 又 r.v. 族 $\{\eta_t,t\in T\}$ 满足:对每 $t\in T$, $\eta_t=\xi_t$ a.s.. 证明 $\{\eta_t,t\in T\}$ 也是独立的.

17. 设 $\{F_n,n\geqslant 1\}$ 是一族 d.f.. 证明存在一个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 以及它上面的独立 r.v. 列 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 使对每 $n\geqslant 1$, $\xi_n\sim F_n$.

18. 设 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 是某概率空间上的 r.v. 列. 证明存在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$,在它上面可定义 r.v. 列 $\{\eta_n,n\geqslant 1\}$ 和 $\{\zeta_n,n\geqslant 1\}$ 使

(1) $\{\eta_n,n\geqslant 1\}$ 和 $\{\zeta_n,n\geqslant 1\}$ 均与 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 同分布;

(2) $\{\eta_n,n\geqslant 1\}$ 与 $\{\zeta_n,n\geqslant 1\}$ 独立.

19. 设 r.v. $\xi,\eta$ 独立,证明

(1) 如对某 $r>0$, $E|\xi+\eta|^r<\infty$,则

$$E|\xi|^r<\infty,E|\eta|^r<\infty;$$

(2) 如 $\xi\eta$ 在 $c\neq 0$ 退化,则 $\xi$ 和 $\eta$ 均退化.

20. 设 $F$ 和 $G$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上非降右连续函数. 证明对任何实数 $a<$

$b$,下列分部积分公式成立：

$$F(b)G(b)-F(a)G(a)$$
$$=\int_{(a,b]}F(x)\mathrm{d}G(x)+\int_{(a,b]}G(x-0)\mathrm{d}F(x).$$

21. 设 r. v. $\xi\sim F$, $E|\xi|^n<\infty$. 证明：

$$\int_0^\infty x^n\mathrm{d}F(x)=n\int_0^\infty x^{n-1}[1-F(x)]\mathrm{d}x;$$

$$\int_{-\infty}^0|x|^n\mathrm{d}F(x)=n\int_0^\infty x^{n-1}F(-x)\mathrm{d}x;$$

$$E|\xi|^n=n\int_0^\infty x^{n-1}[1-F(x)+F(-x)]\mathrm{d}x.$$

22. 设$\{\xi_k,k=1,\cdots,n\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机向量.对每$\omega\in\Omega$,$\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega)$按从小到大的次序排列成

$$\xi_{n,1}(\omega)\leqslant\xi_{n,2}(\omega)\leqslant\cdots\leqslant\xi_{n,n}(\omega).$$

这样得到的$(\xi_{n,1},\cdots,\xi_{n,n})$称为$\xi_1,\cdots,\xi_n$的次序统计量.证明：次序统计量$(\xi_{n,1},\cdots,\xi_{n,n})$仍是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机向量.

23. 分布函数

$$E(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$$

称为标准指数 d. f. ；分布函数

$$\Gamma_n(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, & x\geqslant 0\end{cases}$$

称为参数为$n$的 Gamma d. f. ；分布函数

$$B_{n_1,n_2}(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{(n_1+n_2-1)!}{(n_1-1)!(n_2-1)!}\displaystyle\int_0^x t^{n_1-1}(1-t)^{n_2-1}\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

称为参数为$(n_1,n_2)$的 Beta d. f. . 证明

(1) 如果 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 独立同标准指数分布，则 $\sum_{k=1}^{n}\xi_k \sim \Gamma_n$；

(2) 如果 $\eta_1\sim\Gamma_{n_1},\eta_2\sim\Gamma_{n_2}$，则 $\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2} \sim B_{n_1,n_2}$.

24. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 独立同 d. f. $F$，$\xi_{n,1}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{n,n}$ 是 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的次序统计量. 证明

$$P(\xi_{n,k}\leqslant x) = B_{k,n-k+1}(F(x)),\quad x\in \boldsymbol{R}$$

对一切 $k=1,\cdots,n$ 成立.

## 第二节　距离可测空间

### 2.1 距离空间提要

设 $(X,\rho)$ 是距离空间. 对每 $x\in X$，

$$U(x,\varepsilon) = \{y: \rho(y,x) < \varepsilon\}$$

称为 $x$ 的半径为 $\varepsilon>0$ 的球邻域. $X$ 的子集 $A$ 称为开集，如对每 $x\in A$，存在 $\varepsilon>0$ 使 $U(x,\varepsilon)\subset A$. 不难验证：$X$ 和 $\varnothing$ 是开集；两个开集之交是开集；任意个开集之并仍是开集. $X$ 的子集 $A$ 称为闭集，如其余集 $A^c$ 是开集. 不难验证：$X$ 与 $\varnothing$ 是闭集；两个闭集之并是闭集；任意个闭集之交仍是闭集.

称 $x\in X$ 是 $A\subset X$ 的一个聚点，如果对每 $\varepsilon>0$，存在 $y\in A\setminus\{x\}$ 使 $y\in U(x,\varepsilon)$. $A$ 和它的全体聚点合在一起组成之集叫做 $A$ 的闭包，记作 $A^-$. 称 $x\in A\subset X$ 为 $A$ 的内点，如存在 $\varepsilon>0$ 使 $U(x,\varepsilon)\subset A$. $A$ 的内点的全体组成之集称为 $A$ 的内部，记为 $A^0$. 容易看出，$A^-$ 是包含 $A$ 的最小闭集，$A^0$ 是 $A$ 包含的最大开集. 今后，我们把 $\partial A =: A^-\setminus A^0$ 称为 $A$ 的边界. 设 $x\in X, A\subset X$，通常称 $\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,y): y\in A\}$ 为点 $x$ 到集 $A$ 间的距离. 若 $A,B\subset X$，又把 $\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y): x\in A, y\in B\}$ 称为集 $A$ 和 $B$ 间的距离.

$X$ 的子集 $A$ 称为是稠密的，如果 $A^-=X$. $X$ 称为是可分的，

如果 $X$ 有一个至多可数的稠密集. 一族非空开集组成的集合系 $\{G_t, t\in T\}$ 称为 $X$ 的拓扑基，如果 $X$ 之任一非空开集均可表为 $\{G_t, t\in T\}$ 中若干集合之并，或等价地对每 $x\in X$ 和每 $\varepsilon>0$，存在 $t\in T$ 使 $G_t\subset U(x,\varepsilon)$. 可以证明：$X$ 是可分的当且仅当它有可数拓扑基.

距离空间 $X$ 的点列 $\{x_n\}$ 称为基本列，如当 $n,m\to\infty$ 时，$\rho(x_n, x_m)\to 0$. 点列 $\{x_n\}$ 称为收敛列，如果存在 $x\in X$ 使当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n,x)\to 0$；此时，亦称 $\{x_n\}$ 收敛到 $x$，记作 $x_n\to x$. 如果 $X$ 的每一个基本列都是收敛列，则称它是完备的.

设 $A$ 是 $X$ 的子集，则 $(A,\rho)$ 仍然是一个距离空间，称之为 $(X,\rho)$ 的子空间. 易证 $B$ 是 $A$ 之开集当且仅当存在 $X$ 之开集 $G$ 使 $B=A\cap G$. 此外，可分距离空间的任一子空间是可分的；如果距离空间 $X$ 的子空间 $A$ 是完备的，那么它一定是 $X$ 中之闭集；完备距离空间 $X$ 的子空间是完备的当且仅当它是 $X$ 中之闭集.

$X$ 中的一族开集 $\{G_t, t\in T\}$ 称为它的开覆盖，如果 $\bigcup_{t\in T} G_t = X$. $X$ 称为是紧的，如果它的任一开覆盖都含一个有限子覆盖，即如 $\{G_t, t\in T\}$ 是 $X$ 的开覆盖，则一定存在 $n\geqslant 1$, $\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T$，使 $\{G_{t_i}, i=1,\cdots,n\}$ 是 $X$ 的开覆盖. $X$ 是紧的当且仅当 $X$ 的每一无穷子集都有聚点当且仅当 $X$ 的每一序列都有收敛子列. $X$ 称为是予紧的，如对每 $\varepsilon>0$，$X$ 有有限 $\varepsilon$ 网，也就是说存在 $X$ 的有限子集 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 使对每 $x\in X$, $\rho(x,x_i)<\varepsilon$ 必对某 $i=1,\cdots,n$ 成立. 又 $X$ 是紧的当且仅当它是予紧和完备的；予紧的距离空间必是可分的. 而 $X$ 是可分的当且仅当它的任一开覆盖有可数子覆盖.

$X$ 的子空间 $A$ 如是紧的或予紧的，则分别称为 $X$ 的紧集或予紧集. 又 $X$ 的子集 $A$ 称为是有界的，如 $\sup_{x,y\in A}\rho(x,y)<\infty$. 易见，予紧集是有界集，紧集是闭集，而紧空间的闭集也是紧集. $X$ 的子集 $A$ 称为是相对紧的，如其闭包 $A^-$ 是紧集. 相对紧集必是予紧

集，而完备空间的子紧集必是相对紧的. $X$ 的子集相对紧当且仅当它的每一个序列有一个收敛子列.

设 $(X,\rho)$ 和 $(X^*,\rho^*)$ 是两距离空间. $X$ 到 $X^*$ 的映射 $f$ 称做在 $x_0\in X$ 连续，如对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时，有 $\rho^*(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. 如果对每 $x\in X$，$f$ 在 $x$ 连续，则称 $f$ 是连续映射. $f$ 是 $(X,\rho)$ 到 $(X^*,\rho^*)$ 的连续映射当且仅当对 $X^*$ 的任一开集 $G$，$f^{-1}G$ 是 $X$ 的开集当且仅当对 $X^*$ 的任一闭集 $F$，$f^{-1}F$ 是 $X$ 的闭集当且仅当对 $X$ 的任一子集 $A$，$f(A^-)\subset f(A)^-$ 当且仅当对任 $x_n\in X$ 和 $x\in X$，$x_n\to x$ 蕴含 $f(x_n)\to f(x)$. 设 $f$ 是 $(X,\rho)$ 到 $(X^*,\rho^*)$ 的 1—1 的在上的映射，而且 $f$ 和 $f^{-1}$ 都是连续的，那么称它为一个同胚映射. 如存在 $(X,\rho)$ 到 $(X^*,\rho^*)$ 之同胚映射，那么称这两距离空间同胚. 如 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 都是 $X$ 上的距离，而且 $(X,\rho_1)$ 到 $(X,\rho_2)$ 的恒等映射 $f(x)=x$ 是同胚映射，那么称这两距离是等价的.

$(X,\rho)$ 到 $(X^*,\rho^*)$ 的映射 $f$ 称为是一致连续的，如对任 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使任 $x_1,x_2\in X$，只要 $\rho(x_1,x_2)<\delta$，就有 $\rho^*(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$. 从紧空间到一般距离空间的连续映射是一致连续的.

设对 $i=1,\cdots,n$，$(X_i,\rho_i)$ 是距离空间，记 $X=\bigtimes_{i=1}^{n}X_i$. 对 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)\in X$，令

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2(x_i,y_i)\Big]^{1/2}.$$

易见 $(X,\rho)$ 是一个距离空间，称之为 $(X_i,\rho_i)$，$i=1,\cdots,n$ 的乘积空间. 设对每 $i\geqslant1$，$(X_i,\rho_i)$ 是距离空间，记 $X=\bigtimes_{i=1}^{\infty}X_i$. 对 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots)\in X$，令

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\rho_i(x_i,y_i)/[1+\rho_i(x_i,y_i)],$$

则$(X,\rho)$还是一个距离空间，称之为$(X_i,\rho_i),i\geqslant 1$的乘积空间. 综合以上两种情况，用1.6约定的记号，我们就对一族距离空间$(X_i,\rho_i),i\in N$定义了其乘积空间$(X,\rho)$. 可以证明：$X$中之序列$\{x^{(n)}=(x_i^{(n)},i\in N),n\geqslant 1\}$是基本列当且仅当对每$i\in N$，$\{x_i^{(n)},n\geqslant 1\}$是$X_i$中的基本列；$X$中之序列$\{x^{(n)}=(x_i^{(n)},i\in N),n\geqslant 1\}$收敛到$x=(x_i,i\in N)\in X$当且仅当对每$i\in N$，$\{x_i^{(n)},n\geqslant 1\}$收敛到$x_i\in X_i$；$X$是完备的，当且仅当对每$i\in N$，$X_i$是完备的. 又可以证明：$X$是可分的、予紧的和紧的，其充要条件分别是对每$i\in N$，$X_i$是可分的、予紧的和紧的.

## 2.2 距离可测空间

设$X$是距离空间，$\rho$是$X$上的距离. 以$\mathscr{O}$记$X$的全体开集组成的集合系.

**定义 1.2.1** $\mathscr{B}=\sigma(\mathscr{O})$称为距离空间$X$上的Borel集合系，$\mathscr{B}$中的集称为$X$中的Borel集；$(X,\mathscr{B})$称为距离可测空间.

每一个距离空间都自然而然地产生一个距离可测空间. 由于$X$上两个等价的距离产生同样的开集系，故它们对应着同一个距离可测空间.

考虑维数至多是可数的乘积空间. 以$(X,\rho)$记一族距离空间$\{(X_i,\rho_i),i\in N\}$的乘积空间. 距离空间$(X,\rho)$的Borel集系记作$\mathscr{B}$；对每$i\in N$，$(X_i,\rho_i)$的Borel集系记作$\mathscr{B}_i$. 我们将说明$\mathscr{B}$和$\bigtimes_{i\in N}\mathscr{B}_i$间的关系于下.

**定理 1.2.1** 对一般距离空间$(X_i,\rho_i),i\in N$，有

(1.2.1)
$$\mathscr{B}\supset\bigtimes_{i\in N}\mathscr{B}_i;$$

如对每$i\in N$，$(X_i,\rho_i)$可分，则

(1.2.2)
$$\mathscr{B}=\bigtimes_{i\in N}\mathscr{B}_i.$$

**证明** 以 $\mathscr{O}_i, i\in N$ 和 $\mathscr{O}$ 分别记 $(X_i,\rho_i), i\in N$ 和 $(X,\rho)$ 的开集系. 当 $N=\{1,\cdots,n\}$ 时,易见

$$\begin{aligned}\bigtimes_{i\in N}\mathscr{B}_i &= \sigma\Big(\Big\{\bigtimes_{i=1}^{n} B_i : B_i\in\mathscr{B}_i, i=1,\cdots,n\Big\}\Big)\\ &= \sigma\Big(\Big\{\bigtimes_{i=1}^{n} G_i : G_i\in\mathscr{O}_i, i=1,\cdots,n\Big\}\Big)\\ &\subset \sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}.\end{aligned}$$

当 $N=\{1,2,\cdots\}$ 时,又有

$$\begin{aligned}\bigtimes_{i\in N}\mathscr{B}_i &= \sigma\Big(\Big\{\Big(\bigtimes_{i=1}^{k} B_i\Big)\times\Big(\bigtimes_{i=k+1}^{\infty} X_i\Big) : B_i\in\mathscr{B}_i, i=1,\cdots,k; k\geqslant 1\Big\}\Big)\\ &= \sigma\Big(\Big\{\Big(\bigtimes_{i=1}^{k} G_i\Big)\times\Big(\bigtimes_{i=k+1}^{\infty} X_i\Big) : G_i\in\mathscr{O}_i, i=1,\cdots,k; k\geqslant 1\Big\}\Big)\\ &\subset \sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}.\end{aligned}$$

故(1.2.1)总成立.

设对每 $i\in N$, $(X_i,\rho_i)$ 可分. 取 $\mathscr{U}_i$ 为 $X_i$ 的可数拓扑基并令

$$\mathscr{U} = \begin{cases}\Big\{\bigtimes_{i=1}^{n} U_i : U_i\in\mathscr{U}_i, i=1,\cdots,n\Big\}, & N=\{1,\cdots,n\},\\ \Big\{\Big(\bigtimes_{i=1}^{k} U_i\Big)\times\Big(\bigtimes_{i=k+1}^{\infty} X_i\Big) : U_i\in\mathscr{U}_i, i=1,\cdots,k; k\geqslant 1\Big\}, & N=\{1,2,\cdots\}.\end{cases}$$

不难验证 $\mathscr{U}$ 是 $(X,\rho)$ 的一个可数拓扑基. 由于 $\mathscr{U}\subset\bigtimes_{i\in N}\mathscr{B}_i$,我们得

$$\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{O}) = \sigma(\mathscr{U}) \subset \bigtimes_{i\in N}\mathscr{B}_i.$$

上式与(1.2.1)结合便得(1.2.2). 证完.

引进距离可测空间的原因是概率论中常常要研究取值于距离空间的随机元. 因此,定理 1.2.1 和定理 1.1.13 的如下推论是有用的.

**系 1.2.2** 如对每 $i\in \boldsymbol{N}$, $X_i$ 是可分距离空间，则 $\xi=(\xi_i,i\in \boldsymbol{N})$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到 $X_i,i\in \boldsymbol{N}$ 的乘积空间 $X$ 的随机元当且仅当对每 $i\in \boldsymbol{N}$, $\xi_i$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到 $X_i$ 的随机元.

下面是一些常见的距离可测空间.

空间 $\boldsymbol{R}$ 对每 $x,y\in \boldsymbol{R}$，令

$$d(x,y)=|x-y|,$$

则 $(\boldsymbol{R},d)$ 是一个完备可分距离空间. 这个距离空间的 Borel 集系就是第一节定义的 $\mathscr{R}$；取值于这个距离空间的随机元就是定义 1.1.3 中的 r.v..

空间 $\boldsymbol{R}^k$ 对每 $x=(x_1,\cdots,x_k)$, $y=(y_1,\cdots,y_k)\in \boldsymbol{R}^k$，令

$$d_k(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}.$$

$(\boldsymbol{R}^k,d_k)$ 是 $k$ 个 $(\boldsymbol{R},d)$ 的乘积空间，仍是完备可分距离空间. 据定理 1.2.1，距离空间 $(\boldsymbol{R}^k,d_k)$ 的 Borel 集系就是第一节 1.6 中定义的 $\mathscr{R}^k$，取值于这个距离空间的随机元就是 $k$ 维随机向量.

空间 $\boldsymbol{R}^\infty$ 对每 $x=(x_i,i\geqslant 1)$, $y=(y_i,i\geqslant 1)\in \boldsymbol{R}^\infty$，令

$$d_\infty(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|x_i-y_i|/(1+|x_i-y_i|).$$

$(\boldsymbol{R}^\infty,d_\infty)$ 是可数个 $(\boldsymbol{R},d)$ 的乘积空间，还是完备可分距离空间. 距离空间 $(\boldsymbol{R}^\infty,d_\infty)$ 的 Borel 集系记为 $\mathscr{R}^\infty$，取值于这个距离空间的随机元就是 r.v. 序列.

空间 $C[0,1]$ 以 $C[0,1]$ 记在闭区间 $[0,1]$ 上定义的实值连续函数的全体组成之集. 对 $x=(x_t,0\leqslant t\leqslant 1)$, $y=(y_t,0\leqslant t\leqslant 1)\in C[0,1]$，令

$$d_C(x,y)=\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_t-y_t|,$$

则 $(C[0,1],d_C)$ 成为一个完备可分的距离空间. 我们把这个距离空间的 Borel 集系记为 $\mathscr{R}_C[0,1]$. 设 $S\subset[0,1]$. 对每 $x=(x_t,0\leqslant t\leqslant 1)\in C[0,1]$，令

$$\pi_S(x) = (x_t, t \in S),$$

并仍称之为投影映射. 关于 $\mathscr{R}_C[0,1]$的结构,有如下的结论.

**定理 1.2.3** $\mathscr{R}_C[0,1]=\sigma(\{\pi_t^{-1}(-\infty,u]:u\in \boldsymbol{R},t\in[0,1]\})$.

**证明** 对每 $n\geqslant 1, 0\leqslant t_1<\cdots<t_n\leqslant 1, \pi_{t_1,\cdots,t_n}$是$(C[0,1],d_C)$到$(\boldsymbol{R}^n,d_n)$的连续映射. 但连续映射是可测的,故对每 $u\in \boldsymbol{R}$,每 $t\in[0,1]$,总有 $\pi_t^{-1}(-\infty,u]\in\mathscr{R}_C[0,1]$. 于是

$$\sigma(\{\pi_t^{-1}(-\infty,u]:u\in \boldsymbol{R},t\in[0,1]\})\subset\mathscr{R}_C[0,1].$$

设 $D$ 是$[0,1]$之可数稠集. 对任给 $\varepsilon>0$ 和 $x=(x_s,0\leqslant s\leqslant 1)\in C[0,1]$,我们有

$$\begin{aligned}
&\{y\in C[0,1]:d_C(y,x)<\varepsilon\}\\
&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{y\in C[0,1]:d_C(y,x)\leqslant\varepsilon-1/n\}\\
&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{t\in D}\{y=(y_s,0\leqslant s\leqslant 1)\in C[0,1]:|y_t-x_t|\leqslant\varepsilon-1/n\}\\
&\in\sigma(\{\pi_t^{-1}(-\infty,u]:u\in \boldsymbol{R},t\in[0,1]\}).
\end{aligned}$$

由于 $C[0,1]$可分,上式给出

$$\mathscr{R}_C[0,1]\subset\sigma(\{\pi_t^{-1}(-\infty,u]:u\in \boldsymbol{R},t\in[0,1]\}).$$

定理证完.

作为定理 1.2.3 的推论,我们知:$\xi=(\xi_t,0\leqslant t\leqslant 1)$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(C[0,1],\mathscr{R}_C[0,1])$的随机元当且仅当对每 $\omega\in\Omega$,$\xi_t(\omega)$ 作为 $t$ 的函数在$[0,1]$上连续;对每 $t\in[0,1]$,$\xi_t$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v..

空间 $C[0,\infty)$　以 $C[0,\infty)$记$[0,\infty)$上实值连续函数的全体组成之集. 对每 $x=(x_t,t\geqslant 0),y=(y_t,t\geqslant 0)\in C[0,\infty)$,记 $d_C^{(k)}(x,y)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant k}|x_t-y_t|$,再令

$$d_C^{\infty}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\min(d_C^{(k)}(x,y),1)/2^k.$$

不难验证，$(C[0,\infty),d_C^\infty)$是一个完备可分距离空间而且对任 $x\in C[0,\infty)$，$x^{(n)}\in C[0,\infty)$，$d_C^\infty(x^{(n)},x)\to 0$ 当且仅当对每 $k\geqslant 1$，$d_C^{(k)}(x^{(n)},x)\to 0$. 把 $(C[0,\infty),d_C^\infty)$ 中的 Borel 集系记为 $\mathscr{R}_C[0,\infty)$. 设 $S\subset[0,\infty)$. 对每 $x=(x_t,t\geqslant 0)\in C[0,\infty)$，令

$$\pi_S(x)=(x_t,t\in S)$$

并称之为投影映射. 类似于 $C[0,1]$的情况，可以证明：

**定理 1.2.4** $\mathscr{R}_C[0,\infty)=\sigma(\{\pi_t^{-1}(-\infty,u];u\in\boldsymbol{R},t\geqslant 0\})$.

由此可见，$\xi=(\xi_t,t\geqslant 0)$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(C[0,\infty),\mathscr{R}_C[0,\infty))$的随机元当且仅当对每 $\omega\in\Omega$，$\xi_t(\omega)$作为 $t$ 的函数在$[0,\infty)$上连续；对每 $t\geqslant 0$，$\xi_t$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r. v..

## 2.3 完备可分距离空间

前面所述的几个例子都是完备可分距离空间. 事实上，今后常见的也是这类距离空间. 因此有必要对其性质作进一步讨论.

考虑 $\boldsymbol{R}^\infty$的子集$[0,1]^\infty$，沿用 $\boldsymbol{R}^\infty$中的距离 $d_\infty$，$([0,1]^\infty,d_\infty)$成为一个距离空间.

**命题 1.2.5** 任一可分距离空间$(X,\rho)$与$([0,1]^\infty,d_\infty)$的一个子空间同胚.

**证明** 设 $D=\{\alpha_n,n\geqslant 1\}$是$(X,\rho)$的一可数稠集. 对每 $x,y\in X$，令 $\hat{\rho}(x,y)=\rho(x,y)/[1+\rho(x,y)]$. 定义$(X,\rho)$到$([0,1]^\infty,d_\infty)$的映射如下：

$$f(x)=(\hat{\rho}(x,\alpha_n),n\geqslant 1),\quad x\in X.$$

如果 $X$ 中之序列$\{x_i,i\geqslant 1\}$收敛到 $x\in X$，则对每 $n\geqslant 1$ 当 $i\to\infty$时总有

$$|\hat{\rho}(x_i,\alpha_n)-\hat{\rho}(x,\alpha_n)|\leqslant\hat{\rho}(x_i,x)\leqslant\rho(x_i,x)\to 0.$$

这表明在空间$([0,1]^\infty,d_\infty)$中

$$f(x_i)=(\hat{\rho}(x_i,\alpha_n),n\geqslant 1)\to f(x)=(\hat{\rho}(x,\alpha_n),n\geqslant 1).$$

因此映射 $f$ 是连续的. 如果 $x_1,x_2\in X$，$\rho(x_1,x_2)>0$，则取 $\alpha\in D$ 使

$\rho(x_1,\alpha)<\rho(x_1,x_2)/2$，便有

$$\rho(x_2,\alpha) \geqslant \rho(x_2,x_1) - \rho(x_1,\alpha) > \rho(x_1,\alpha),$$

并由此推知 $\hat{\rho}(x_2,\alpha)>\hat{\rho}(x_1,\alpha)$. 这表明 $f(x_1)$和 $f(x_2)$至少有一个坐标不同，因此 $f$ 是 1—1 的. 在$[0,1]^\infty$的子集 $f(X)=\{f(x):x\in X\}$上，逆映射 $f^{-1}$有定义. 往证 $f^{-1}$是$(f(X),d_\infty)$到$(X,\rho)$的连续映射，即对任 $x_i\in X,i\geqslant 1$ 和 $x\in X$，$d_\infty(f(x_i),f(x))\to 0$ 蕴含 $\rho(x_i,x)\to 0$. 为此，我们只需说明，如对某 $x_i\in X,i\geqslant 1$ 和 $x\in X$，$\rho(x_i,x)\to 0$ 不成立，则 $d_\infty(f(x_i),f(x))\to 0$ 亦不可能成立. 事实上，当 $\rho(x_i,x)\to 0$ 不成立时，定存在 $\varepsilon_0>0$ 和$\{x_i,i\geqslant 1\}$的子序列$\{x_{i_n},n\geqslant 1\}$使 $\rho(x_{i_n},x)>\varepsilon_0$ 对一切 $n\geqslant 1$ 成立. 这时只要取 $\alpha\in D$ 使 $\rho(x,\alpha)<\varepsilon_0/2$，就有

$$\rho(x_{i_n},\alpha) \geqslant \rho(x_{i_n},x) - \rho(x,\alpha) > \varepsilon_0/2,$$

从而 $\hat{\rho}(x_{i_n},\alpha)\geqslant\varepsilon_0/(2+\varepsilon_0)>\hat{\rho}(x,\alpha)$，即

$$\hat{\rho}(x_{i_n},\alpha) - \hat{\rho}(x,\alpha) \geqslant \varepsilon_0/(2+\varepsilon_0) - \hat{\rho}(x,\alpha) > 0$$

对一切 $n\geqslant 1$ 成立. 于是 $f(x_{i_n})$至少有一个坐标不收敛到 $f(x)$相应的坐标，$d_\infty(f(x_i),f(x))\to 0$ 当然不能成立. 至此，我们证得了 $f$ 是$(X,\rho)$到$(f(X),d_\infty)$的同胚映射. 命题证完.

**命题 1.2.6** 如果完备距离空间$(X^*,\rho^*)$与距离空间$(X,\rho)$的一个子集 $B$ 同胚，则 $B$ 是$(X,\rho)$中的 $G_\delta$ 型集，即它可表为$(X,\rho)$中可数个开集之交.

**证明** 设 $f$ 是$(X^*,\rho^*)$到$(B,\rho)$的同胚映射. 对每 $x,y\in B$，令$(\rho^* f^{-1})(x,y)=\rho^*(f^{-1}(x),f^{-1}(y))$. 易见$(B,\rho^* f^{-1})$是完备距离空间而且 $B$ 上的距离 $\rho^* f^{-1}$和 $\rho$ 是等价的. 以 $\mathscr{O}$ 记$(X,\rho)$的开集系，$B^-$记$(X,\rho)$中子集 $B$ 的闭包，则$(B^-,\rho)$之开集系为 $B^-\cap\mathscr{O}$. 对每 $n\geqslant 1$，令

$$\mathscr{U}_n=\{U\in B^-\cap\mathscr{O}:y_1,y_2\in U\cap B \text{ 蕴含} (\rho^* f^{-1})(y_1,y_2)<1/n\};$$

$$U_n=\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}_n\}.$$

我们先证

$$B=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n. \tag{1.2.3}$$

设 $x\in B$. 对每 $n\geqslant 1$,考虑$(B,\rho^* f^{-1})$中以 $x$ 为中心 $1/(2n)$为半径的开球

$$V_n=\{y\in B:(\rho^* f^{-1})(y,x)<1/(2n)\}.$$

由于 $B$ 上的距离 $\rho^* f^{-1}$和 $\rho$ 等价,故 $V_n$ 是$(B,\rho)$中的开集. 但$(B,\rho)$是$(B^-,\rho)$的子空间,故一定存在 $U\in B^-\cap\mathscr{O}$ 使 $V_n=U\cap B$. 此外,对任 $y_1,y_2\in U\cap B=V_n$,有

$$(\rho^* f^{-1})(y_1,y_2)\leqslant(\rho^* f^{-1})(y_1,x)+(\rho^* f^{-1})(y_2,x)<1/n.$$

因此,$U\in\mathscr{U}_n$ 并进而推得

$$x\in V_n=U\cap B\subset U\subset U_n$$

对一切 $n\geqslant 1$ 成立. 这证明了 $B\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$.

设 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. 此时 $x\in B^-$,故存在$\{x_i,i\geqslant 1\}\subset B$ 使当 $i\to\infty$ 时 $\rho(x_i,x)\to 0$. 此时又有:对每 $n\geqslant 1$,存在 $U\in\mathscr{U}_n$ 使 $x\in U$. 由于 $U$ 是$(B^-,\rho)$之开集且$\{x_i,i\geqslant 1\}\subset B$ 在$(B^-,\rho)$中收敛到 $x\in U$,故存在 $i_n$ 使 $i\geqslant i_n$ 时 $x_i\in U\cap B$. 这一事实与 $U\in\mathscr{U}_n$ 一起表明当 $i,j\geqslant i_n$ 时必有$(\rho^* f^{-1})(x_i,x_j)<1/n$. 因此$\{x_i,i\geqslant 1\}$是$(B,\rho^* f^{-1})$中之基本列. 但$(B,\rho^* f^{-1})$完备,故存在 $x_0\in B$ 使$(\rho^* f^{-1})(x_i,x_0)\to 0$. 由于 $\rho^* f^{-}$ 与 $\rho$ 是 $B$ 上的等价距离,故亦有 $\rho(x_i,x_0)\to 0$. 于是,序列$\{x_i,i\geqslant 1\}$在$(B^-,\rho)$中既收敛到 $x$,又收敛到 $x_0$,因而 $x=x_0\in B$. 这样又证得了 $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\subset B$,从而(1.2.3)成立.

考察(1.2.3)式. 由于对每 $n\geqslant 1$,存在 $G_n\in\mathscr{O}$ 使 $U_n=G_n\cap B^-$,又由于可表

$$B^- = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{x \in X; \rho(x,B) < 1/m\},$$

记 $G_{nm} = G_n \cap \{x \in X; \rho(x,B) < 1/m\}$，便得

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} G_{n,m}.$$

易见 $G_{n,m} \in \mathscr{O}$ 对每 $n, m \geqslant 1$ 成立. 命题得证.

把命题 1.2.5 和命题 1.2.6 结合起来，便得

**命题 1.2.7** 每一完备可分距离空间与 $([0,1]^{\infty}, d_{\infty})$ 中的一个 $G_\delta$ 型集同胚.

### 2.4 Borel 空间

我们进而讨论由完备可分距离空间产生的距离可测空间. 为此，需要讨论可测空间之间的等价概念.

**定义 1.2.2** 可测空间 $(X, \mathscr{B})$ 和 $(Y, \mathscr{S})$ 称为是等价的，记作 $(X, \mathscr{B}) \sim (Y, \mathscr{S})$，如果存在一个从 $X$ 到 $Y$ 的 1—1 的在上的映射 $f$，使 $f$ 和 $f^{-1}$ 分别是 $(X, \mathscr{B})$ 到 $(Y, \mathscr{S})$ 和 $(Y, \mathscr{S})$ 到 $(X, \mathscr{B})$ 的可测变换. 此时，$f$ 称为等价映射.

**命题 1.2.8** 由 $\sim$ 定义的关系是等价关系，即若 $(\Omega, \mathscr{F})$，$(X, \mathscr{B})$ 和 $(Y, \mathscr{S})$ 都是可测空间，则

1) $(\Omega, \mathscr{F}) \sim (\Omega, \mathscr{F})$；

2) $(\Omega, \mathscr{F}) \sim (X, \mathscr{B})$ 蕴含 $(X, \mathscr{B}) \sim (\Omega, \mathscr{F})$；

3) $(\Omega, \mathscr{F}) \sim (X, \mathscr{B})$ 和 $(X, \mathscr{B}) \sim (Y, \mathscr{S})$ 蕴含 $(\Omega, \mathscr{F}) \sim (Y, \mathscr{S})$.

**命题 1.2.9** 设 $\{(X_t, \mathscr{B}_t), t \in T\}$ 和 $\{(Y_t, \mathscr{S}_t), t \in T\}$ 是两族可测空间. 如对每 $t \in T$，$(X_t, \mathscr{B}_t) \sim (Y_t, \mathscr{S}_t)$，则

$$\left( \mathop{\times}_{t \in T} X_t, \mathop{\times}_{t \in T} \mathscr{B}_t \right) \sim \left( \mathop{\times}_{t \in T} Y_t, \mathop{\times}_{t \in T} \mathscr{S}_t \right).$$

**证明** 对每 $t \in T$，以 $f_t$ 记 $(X_t, \mathscr{B}_t)$ 到 $(Y_t, \mathscr{S}_t)$ 的等价映射. 对每 $x = (x_t, t \in T)$，令

$$f(x) = (f_t(x_t), t \in T).$$

不难验证 $f$ 是 $\left(\bigtimes_{t\in T} X_t, \bigtimes_{t\in T} \mathscr{B}_t\right)$ 到 $\left(\bigtimes_{t\in T} Y_t, \bigtimes_{t\in T} \mathscr{S}_t\right)$ 的等价映射. 证完.

**命题 1.2.10** 如 $f$ 是可测空间$(X,\mathscr{B})$到$(Y,\mathscr{S})$的等价映射,则对任 $B\subset X$,$f$ 限制在 $B$ 上是可测空间$(B,B\cap\mathscr{B})$到$(f(B), f(B)\cap\mathscr{S})$的等价映射.

**命题 1.2.11** 设$(X,\mathscr{B})$和$(Y,\mathscr{S})$是可测空间,$\{X_t,t\in T\}$和$\{Y_t,t\in T\}$分别是 $X$ 和 $Y$ 的分割(集合分割的定义见 1.9). 如果对每 $t\in T$,$(X_t,X_t\cap\mathscr{B})\sim(Y_t,Y_t\cap\mathscr{S})$,则$(X,\mathscr{B})\sim(Y,\mathscr{S})$.

**证明** 对每 $t\in T$,以 $f_t$ 记$(X_t,X_t\cap\mathscr{B})$到$(Y_t,Y_t\cap\mathscr{S})$的等价映射. 定义 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 使当 $x\in X_t$ 时 $f(x)=f_t(x)$,$t\in T$. 易见 $f$ 是$(X,\mathscr{B})$到$(Y,\mathscr{S})$的等价映射. 证完.

**命题 1.2.12** 距离空间 $X$ 到 $Y$ 的同胚映射是对应距离可测空间$(X,\mathscr{B})$到$(Y,\mathscr{S})$的等价映射.

下面,我们引进 Borel 空间的概念.

**定义 1.2.3** 可测空间$(X,\mathscr{B})$称为 Borel 空间,如存在 $B\in[0,1)\cap\mathscr{R}$ 使$(X,\mathscr{B})\sim(B,B\cap\mathscr{R})$.

我们将证明,任一完备可分距离空间产生的距离可测空间是 Borel 空间. 为此,要先证两个引理. 记 $H=\{0,1\}$,即由两个数 0 和 1 组成之集;$\mathscr{H}=\{A:A\subset H\}$,即由 $H$ 的一切子集组成之 $\sigma$ 域;$D=H^\infty$,即由每项非 0 即 1 的序列组成之集;$\mathscr{D}=\mathscr{H}^\infty$,即 $\mathscr{H}$ 的乘积 $\sigma$ 域.

**引理 1.2.13** $([0,1),[0,1)\cap\mathscr{R})\sim(D,\mathscr{D})$.

**证明** 易见,对每 $\alpha\in D$,$\{\alpha\}\in\mathscr{D}$. 又

$D_0 = \{\alpha = (\alpha_i, i \geqslant 1) \in D$:存在 $i_0 \geqslant 1$ 使对一切 $i \geqslant i_0, \alpha_i = 1\}$

是 $D$ 的可数子集,故 $D_0\in\mathscr{D}$. 对每 $x\in[0,1)$,存在唯一的 $\alpha=(\alpha_i,i\geqslant1)\in D_0^c$ 使之表为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i / 2^i; \tag{1.2.4}$$

反之，对每 $\alpha=(\alpha_i, i\geqslant 1)\in D_0^c$，(1.2.4)也确定了唯一的 $x\in[0,1)$. 这样，通过(1.2.4)式就定义了一个$[0,1)$到 $D_0^c$ 的1—1的在上的映射 $g: g(x)=\alpha$. 给定 $n\geqslant 1, 0\leqslant k<2^n$. 用(1.2.4)可表 $k/2^n=\sum_{i=1}^{n}\beta_i/2^i$，即

$$g(k/2^n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n, 0, \cdots),$$

其中 $\beta_1,\cdots,\beta_n\in H$. 这时，对每 $x\in[k/2^n,(k+1)/2^n)$，有且仅有一个$(\alpha_{n+i}, i\geqslant 1)\in D_0^c$ 使

$$g(x) = (\beta_1, \cdots, \beta_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \cdots).$$

由此可见

$$\begin{aligned} &g[k/2^n, (k+1)/2^n) \\ &= D_0^c \cap \{\alpha = (\alpha_i, i \geqslant 1); \alpha_i = \beta_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

即在映射 $g$ 下，区间$[k/2^n,(k+1)/2^n)$变成了 $D_0^c$ 与 $\mathscr{D}$ 中一个柱集之交. 由于$[0,1)$的一切形如$[k/2^n,(k+1)/2^n)$之子集生成之 $\sigma$ 域就是$[0,1)\cap\mathscr{R}$，又由于 $D$ 的一切形如$\{\alpha=(\alpha_i,i\geqslant 1)\in D: \alpha_i=\beta_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$的子集生成之 $\sigma$ 域就是 $\mathscr{D}$，故(1.2.5)表明 $g$ 是$([0,1),[0,1)\cap\mathscr{R})$到$(D_0^c, D_0^c\cap\mathscr{D})$的等价映射.

以 $\Gamma$ 记$[0,1)$中有理数全体，又

$$D_1 = \{\alpha \in D: g^{-1}(\alpha) \in \Gamma\}, D_2 = D_0 \cup D_1.$$

由命题 1.2.10，$g$ 是$([0,1)\cap\Gamma^c,[0,1)\cap\Gamma^c\cap\mathscr{R})$到$(D_2^c, D_2^c\cap\mathscr{D})$的等价映射. 再任取一个 $\Gamma$ 到 $D_2$ 的一个1—1的在上的映射 $h$. 由于 $h$ 是$(\Gamma,\Gamma\cap\mathscr{R})$到$(D_2,D_2\cap\mathscr{D})$的等价映射，对每 $x\in[0,1)$令

$$f(x) = g(x) I_{[0,1)\cap\Gamma^c}(x) + h(x) I_{\Gamma}(x),$$

我们就由命题 1.2.11 推知 $f$ 是$([0,1),[0,1)\cap\mathscr{R})$到$(D,\mathscr{D})$的等价映射. 证完.

**引理 1.2.14** $(D,\mathscr{D})\sim(D^\infty,\mathscr{D}^\infty)$.

**证明** 对每 $\alpha=(\alpha_i,i\geqslant 1)$，令 $\beta_{n,m}=\alpha_{n+(n+m-1)(n+m-2)/2}$，$n,m\geqslant 1$；$\beta_n=(\beta_{n,m},m\geqslant 1)$，$n\geqslant 1$；$\beta=(\beta_n,n\geqslant 1)$. 我们就确定了一个 $D$ 到 $D^\infty$ 的 1—1 的在上的映射

$$g:\alpha\in D\to\beta\in D^\infty.$$

对每 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in H$，令 $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{\alpha=(\alpha_i,i\geqslant 1);\alpha_i\in H,i>n\}$ 并记

$$\mathscr{A}=\{A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\in H,i=1,\cdots,n;n\geqslant 1\},$$

则易见

(1.2.6) $$\mathscr{D}=\sigma(\mathscr{A});$$

(1.2.7) $$\mathscr{D}^\infty=\sigma\left(\left\{\left(\mathop{\times}_{i=1}^{n}A_i\right)\times D^\infty:A_i\in\mathscr{A},i=1,\cdots,n;n\geqslant 1\right\}\right).$$

由于映射 $g$ 把每 $A\in\mathscr{A}$ 变成一个形如 $\left(\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\times D^\infty$ 之集，其中 $n\geqslant 1$ 且对每 $i=1,\cdots,n$，$A_i\in\mathscr{A}$，故(1.2.6)和(1.2.7)说明 $g$ 是 $(D,\mathscr{D})$ 到 $(D^\infty,\mathscr{D}^\infty)$ 的可测变换，$g^{-1}$ 是 $(D^\infty,\mathscr{D}^\infty)$ 到 $(D,\mathscr{D})$ 的可测变换. 证完.

**定理 1.2.15** 完备可分距离空间 $X$ 的距离可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 是 Borel 空间.

**证明** 由引理 1.2.13，引理 1.2.14，命题 1.2.8 和命题1.2.9 立得

(1.2.8) $([0,1),[0,1)\cap\mathscr{R})\sim([0,1)^\infty,([0,1)\cap\mathscr{R})^\infty)$.

以 $\mathscr{R}^\infty[0,1)$ 记 $([0,1)^\infty,d_\infty)$ 中之 Borel 集系，由命题 1.2.7 又知存在 $A\in\mathscr{R}^\infty[0,1)$ 使

(1.2.9) $$(X,\mathscr{B})\sim(A,A\cap\mathscr{R}^\infty[0,1)).$$

但由定理 1.2.1 知 $\mathscr{R}^\infty[0,1)=([0,1)\cap\mathscr{R})^\infty$，故(1.2.8)，(1.2.9)和命题 1.2.10 一起推知存在 $B\in[0,1)\cap\mathscr{R}$ 使 $(X,\mathscr{B})\sim(B,B\cap\mathscr{R})$. 证完.

今后将会看到，定理 1.2.15 的好处是可通过它把许多 $\boldsymbol{R}$ 中

的结论推广到一般完备可分距离空间去.为了行文简便,我们将把与完备可分距离空间相联系的距离可测空间称为完备可分距离可测空间.

## 习 题 1.2

1. 考虑 $\boldsymbol{R}^{-}=\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$. 定义 $\boldsymbol{R}^{-}$ 到 $[-1,1]$ 的映射

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x=-\infty,\\ x/(1+|x|), & x\in\boldsymbol{R},\\ 1, & x=+\infty.\end{cases}$$

对每 $x,y\in\boldsymbol{R}^{-}$,令 $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$. 证明 $(\boldsymbol{R}^{-},\rho)$ 是完备可分距离空间并且它的 Borel 集系就是 1.2 中的 $\mathscr{R}^{-}$.

2. 证明下列事实:

(1) $\{x=(x_n,n\geqslant1)\in\boldsymbol{R}^{\infty}:\limsup\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant a\}\in\mathscr{R}^{\infty},a\in\boldsymbol{R}^{-}$;

(2) $\{x=(x_n,n\geqslant1)\in\boldsymbol{R}^{\infty}:\liminf\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant a\}\in\mathscr{R}^{\infty},a\in\boldsymbol{R}^{-}$;

(3) $\{x=(x_n,n\geqslant1)\in\boldsymbol{R}^{\infty}:\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在、有限$\}\in\mathscr{R}^{\infty}$;

(4) $\{x=(x_n,n\geqslant1)\in\boldsymbol{R}^{\infty}:\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛$\}\in\mathscr{R}^{\infty}$;

(5) $[0,1)^{\infty}\in\mathscr{R}^{\infty}$.

3. 设 $\mathscr{B}$ 是距离空间 $(X,\rho)$ 的 Borel 集系,$B\in\mathscr{B}$. 证明 $B\cap\mathscr{B}$ 是距离空间 $(B,\rho)$ 的 Borel 集系.

4. 证明:距离空间任一子集的边界 $\partial A$ 是 Borel 集.

5. 证明:距离空间中仅由一个点组成的单点集是 Borel 集.

6. 距离空间 $(X,\rho)$ 上的实值函数 $f$ 称为在 $x_0\in X$ 处上(下)连续,如对任 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 使当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$(对应地 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon$). 如果 $f$ 在 $X$ 中每一点都上(下)连续,则称 $f$ 是 $(X,\rho)$ 上的上(下)连续函数. 证明 $(X,\rho)$ 上的上连续函数和下连续函数都是距离可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 上的可测函数.

7. 证明距离空间$(X,\rho)$到距离空间$(X^*,\rho^*)$的连续映射是对应的距离可测空间$(X,\mathscr{B})$到距离可测空间$(X^*,\mathscr{B}^*)$的可测变换.

8. 设$(X,\rho)$是可分距离空间.证明$\rho$是乘积距离可测空间$(X\times X,\mathscr{B}\times\mathscr{B})$上的可测函数.

9. 举例说明(1.2.1)式的真包含关系有可能成立.

10. 证明:$d_C^\infty$是$C[0,\infty)$中的距离.

11. 证明:对每$k\geqslant 1$,$C[0,\infty)$上的投影映射$\pi_{[0,k]}$是$(C[0,\infty),\mathscr{R}_C[0,\infty))$到$(C[0,k],\mathscr{R}_C[0,k])$的可测变换,其中$\mathscr{R}_C[0,k]$记$(C[0,k],d_C^{(k)})$的 Borel 集系.

12. 设$x,x^{(n)}\in C[0,\infty),n\geqslant 1$.证明:

$$x^{(n)}\to x,\quad n\to\infty$$

当且仅当对每$k\geqslant 1$

$$\pi_{[0,k]}x^{(n)}\to\pi_{[0,k]}x,\quad n\to\infty.$$

13. 证明:对每$k\geqslant 1$,每$0\leqslant t_1<\cdots<t_k<\infty$,$\pi_{t_1,\cdots,t_k}$是$(C[0,\infty),\mathscr{R}_C[0,\infty))$到$(\boldsymbol{R}^k,\mathscr{R}^k)$的可测变换.

14. 证明:$C[0,1]\notin\mathscr{R}^{[0,1]}$.

15. 证明命题 1.2.8.

16. 证明命题 1.2.10.

17. 证明命题 1.2.12.

## 第三节 条件期望和条件概率

### 3.1 条件期望的定义和性质

**定义 1.3.1** 给定概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非负可测函数$\xi$和子$\sigma$域$\mathscr{G}$($\mathscr{G}$称为$\mathscr{F}$的子$\sigma$域,首先它是一个$\sigma$域,其次$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$),$(\Omega,\mathscr{G},P)$上定义的非负可测函数$E(\xi|\mathscr{G})(\cdot)$称为$\xi$关于$\mathscr{G}$

的条件期望，如对每 $A\in\mathscr{G}$，有

$$\int_A E(\xi|\mathscr{G})\mathrm{d}P = \int_A \xi \mathrm{d}P. \tag{1.3.1}$$

如 $\xi$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上使

$$\min(E(\xi^+ |\mathscr{G}),E(\xi^- |\mathscr{G})) < \infty \quad \text{a.s.} \tag{1.3.2}$$

成立的可测函数，则把 $(\Omega,\mathscr{G},P)$ 上使

$$E(\xi|\mathscr{G}) = E(\xi^+ |\mathscr{G}) - E(\xi^- |\mathscr{G}) \quad \text{a.s.} \tag{1.3.3}$$

成立的可测函数 $E(\xi|\mathscr{G})(\cdot)$ 称为 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望.

条件期望是现代概率论最基本的概念之一. 首先我们来说明其定义的合理性. 对于 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的非负可测函数 $\xi$,

$$\mu(A) = \int_A \xi \mathrm{d}P, \quad A \in \mathscr{G}$$

是 $(\Omega,\mathscr{G})$ 上对 $P$ 绝对连续的测度. 因此，由 Radon-Nikodym 定理知，存在 $(\Omega,\mathscr{G})$ 上非负可测函数 $f$ 使

$$\mu(A) = \int_A f \mathrm{d}P \tag{1.3.4}$$

对每 $A\in\mathscr{G}$ 成立. 把(1.3.4)中的 $f$ 取作(1.3.1)中的 $E(\xi|\mathscr{G})$ 就知道非负可测函数的条件期望总是可以定义的. 根据 Radon-Nikodym 定理，(1.3.4)中的 $f$ 在 a.s. 意义下是唯一的，也就是说，如果有一个 $\mathscr{G}$ 可测函数 $g$ 使 $\mu(A) = \int_A g\mathrm{d}P$ 对每 $A\in\mathscr{G}$ 成立，那么定有 $f=g$ a.s.. 这表明在 a.s. 意义下，非负可测函数条件期望的定义是一意的. 对于满足条件(1.3.2)的可测函数 $\xi$，(1.3.3)的右端是 a.s. 确定的. 这又说明了对满足(1.3.2)的可测函数 $\xi$，其条件期望的定义亦是合理的.

不难看出，如果可测函数 $\xi$ 的积分 $E\xi$ 有意义，那么(1.3.2)一定成立，因而其条件期望可经由(1.3.3)来定义. 另一方面，这时亦可考虑像对待非负可测函数那样直接把 $\xi$ 的条件期望定义为 Radon-Nikodym 导数. 下述命题说明了以上两种定义方式的等价

性.

**命题 1.3.1** 如 $E\xi$ 有意义,则 $E(\xi|\mathscr{G})(\cdot)$ 是 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望当且仅当 $E(\xi|\mathscr{G})(\cdot)$ 关于 $\mathscr{G}$ 可测而且(1.3.1)对每 $A\in\mathscr{G}$ 成立.

应该指出,即使 $E\xi$ 无意义,(1.3.2)仍有可能成立,从而条件期望仍有定义.例如,当 $\xi$ 是一个 r.v. 且 $\mathscr{G}=\mathscr{F}$,总有 $E(\xi^+|\mathscr{G})=\xi^+$,$E(\xi^-|\mathscr{G})=\xi^-$ a.s.,从而

$$E(\xi|\mathscr{G}) = \xi^+ - \xi^- = \xi \quad \text{a.s.},$$

哪怕 $E\xi^+=E\xi^-=\infty$ 也无所谓.

我们把条件期望的性质概括为下列三个定理.

**定理 1.3.2** 设概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可测函数 $\xi$ 关于子 $\sigma$ 域 $\mathscr{G}$ 的条件期望有定义.我们有

(1) 如 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 可测,则 $E(\xi|\mathscr{G})=\xi$ a.s..

(2) 如 $\eta=a\in\overline{R}$ a.s.,则 $E(\eta|\mathscr{G})$ 有定义且 $E(\eta|\mathscr{G})=a$ a.s..

(3) 设 $E\xi$ 有意义.如 $\xi$ 与 $\mathscr{G}$ 独立,则 $E(\xi|\mathscr{G})=E\xi$ a.s.;特别地,若 $\mathscr{G}=\{\varnothing,\Omega\}$,则 $E(\xi|\mathscr{G})=E\xi$ a.s..

(4) 设 $\mathscr{G}_1$ 也是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 代数且 $\mathscr{G}_1\supset\mathscr{G}$.则

$$E[E(\xi|\mathscr{G})|\mathscr{G}_1] = E(\xi|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.};$$

如果 $E(\xi|\mathscr{G}_1)$ 有定义,则亦有

$$E[E(\xi|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}] = E(\xi|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

(5) 若对可测函数 $\eta$,$E(\eta|\mathscr{G})$ 亦有定义且 $\xi\leqslant\eta$ a.s.,则 $E(\xi|\mathscr{G})\leqslant E(\eta|\mathscr{G})$ a.s.;特别地,$|E(\xi|\mathscr{G})|\leqslant E(|\xi||\mathscr{G})$ a.s..

(6) 设 $a,b\in\boldsymbol{R}$.如果 $E\xi$,$E\eta$ 和 $aE\xi+bE\eta$ 均有意义,则

$$E(a\xi + b\eta|\mathscr{G}) = aE(\xi|\mathscr{G}) + bE(\eta|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

**证明** 由条件期望定义立得 1),2).其余性质分款证明如下.

3) $E\xi$ 是 $\mathscr{G}$ 可测函数且独立条件蕴含

$$\int_A \xi \mathrm{d}P = E\xi I_A = E\xi E I_A = \int_A E\xi \mathrm{d}P$$

对每 $A \in \mathscr{G}$ 成立，故由命题 1.5.1 知 3)之第一个结论成立. 由于任一可测函数均与 $\sigma$ 域 $\{\varnothing, \Omega\}$ 独立，故由第一个结论又推得第二个结论.

4) 由于此时 $E(\xi|\mathscr{G})$ 是 $\mathscr{G}_1$ 可测的，故由已证之性质 1)立得第一个等式. 由于 $E(\xi^+|\mathscr{G})$ 关于 $\mathscr{G}$ 可测并且对每 $A \in \mathscr{G} \subset \mathscr{G}_1$，有

$$\int_A E(\xi^+ |\mathscr{G})\mathrm{d}P = \int_A \xi^+ \mathrm{d}P = \int_A E(\xi^- |\mathscr{G}_1)\mathrm{d}P,$$

由定义立得

$$E[E(\xi^+ |\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}] = E(\xi^+ |\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

同理可证 $E[E(\xi^- |\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}] = E(\xi^- |\mathscr{G})$ a.s.，故第二个等式亦成立.

5) 由于 $\xi \leqslant \eta$ a.s. 蕴含 $\xi^+ \leqslant \eta^+$ a.s. 和 $\xi^- \geqslant \eta^-$ a.s.，故对每 $A \in \mathscr{G}$ 有

$$\int_A E(\xi^+ |\mathscr{G})\mathrm{d}P = \int_A \xi^- \mathrm{d}P \leqslant \int_A \eta^+ \mathrm{d}P = \int_A E(\eta^+ |\mathscr{G})\mathrm{d}P;$$

$$\int_A E(\xi^- |\mathscr{G})\mathrm{d}P = \int_A \xi^- \mathrm{d}P \geqslant \int_A \eta^- \mathrm{d}P = \int_A E(\eta^- |\mathscr{G})\mathrm{d}P.$$

由此推知 $E(\xi^+|\mathscr{G}) \leqslant E(\eta^+|\mathscr{G})$ a.s. 和 $E(\xi^-|\mathscr{G}) \geqslant E(\eta^-|\mathscr{G})$ a.s.，因而 5)之结论成立.

6) 对每 $A \in \mathscr{G}$，有

$$\begin{aligned}\int_A (a\xi + b\eta)\mathrm{d}P &= a\int_A \xi \mathrm{d}P + b\int_A \eta \mathrm{d}P \\ &= a\int_A E(\xi|\mathscr{G})\mathrm{d}P + b\int_A E(\eta|\mathscr{G})\mathrm{d}P \\ &= \int_A [aE(\xi|\mathscr{G}) + bE(\eta|\mathscr{G})]\mathrm{d}P,\end{aligned}$$

并且 $aE(\xi|\mathscr{G}) + bE(\eta|\mathscr{G})$ 关于 $\mathscr{G}$ 可测，故由命题 1.3.1 知结论成立. 定理证完.

**定理 1.3.3** 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数列，$\mathscr{G}$ 是一个子 $\sigma$ 域. 我们有

1）**条件单调收敛定理** 若 $0\leqslant\xi_n\uparrow\xi$ a.s.，则 $0\leqslant E(\xi_n|\mathscr{G})\uparrow E(\xi|\mathscr{G})$ a.s.（此处和今后，$a_n\uparrow a$ 表示实序列$\{a_n\}$非降且收敛到 $a$）.

2）**条件 Fatou 引理** 若 $\xi_n\geqslant 0$ a.s.，则

$$E(\liminf_{n\to\infty}\xi_n|\mathscr{G})\leqslant\liminf_{n\to\infty}E(\xi_n|\mathscr{G})\quad \text{a.s.}.$$

3）**条件控制收敛定理** 若对某 $\eta\in L_1(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|\leqslant\eta$ a.s. 且 $\xi_n\to\xi$ a.s.，则

$$\lim_{n\to\infty}E(\xi_n|\mathscr{G})=E(\xi|\mathscr{G})\quad \text{a.s.}.$$

**证明** 1）由定理 1.3.2 的 5)知

$$0\leqslant E(\xi_n|\mathscr{G})\uparrow\lim_{n\to\infty}E(\xi_n|\mathscr{G})\quad \text{a.s.},$$

故利用单调收敛定理得：对每 $A\in\mathscr{G}$，

$$\int_A\lim_{n\to\infty}E(\xi_n|\mathscr{G})\mathrm{d}P=\lim_{n\to\infty}\int_A E(\xi_n|\mathscr{G})\mathrm{d}P=\lim_{n\to\infty}\int_A\xi_n\mathrm{d}P$$
$$=\int_A\lim_{n\to\infty}\xi_n\mathrm{d}P=\int_A\xi\mathrm{d}P.$$

再有$\lim_{n\to\infty}E(\xi_n|\mathscr{G})$是 $\mathscr{G}$ 可测的，故上式表明

$$E(\xi|\mathscr{G})=\lim_{n\to\infty}E(\xi_n|\mathscr{G})\quad \text{a.s.}.$$

2）令 $\eta_n=\inf_{k\geqslant n}\xi_k, n\geqslant 1$ 和 $\eta=\liminf_{n\to\infty}\xi_n$，则 $0\leqslant\eta_n\uparrow\eta$. 对$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$用刚才证得的 1)，便得

$$E(\liminf_{n\to\infty}\xi_n|\mathscr{G})=E(\lim_{n\to\infty}\eta_n|\mathscr{G})=\lim_{n\to\infty}E(\eta_n|\mathscr{G})$$
$$=\lim_{n\to\infty}E(\inf_{k\geqslant n}\xi_k|\mathscr{G})\leqslant\liminf_{n\to\infty}E(\xi_n|\mathscr{G})\quad \text{a.s.}.$$

3）由 $|\xi_n|\leqslant\eta$ a.s. 推知 $\xi_n-\eta\leqslant 0\leqslant\xi_n+\eta$ a.s.. 对$\{\xi_n+\eta, n\geqslant 1\}$用已证之 2)立得

$$E(\xi|\mathscr{G})+E(\eta|\mathscr{G})=E(\xi+\eta|\mathscr{G})=E[\lim_{n\to\infty}(\xi_n+\eta)|\mathscr{G}]$$

$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} E(\xi_n + \eta|\mathscr{G})$$

$$= \liminf_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathscr{G}) + E(\eta|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.},$$

即 $E(\xi|\mathscr{G})\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathscr{G})$ a. s.. 同理,对$\{\eta-\xi_n, n\geqslant1\}$用已证之 2)又可得 $E(\xi|\mathscr{G})\geqslant\limsup\limits_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathscr{G})$ a. s.. 二者结合即是 3). 定理证完.

**定理 1.3.4** 设 $\xi$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数,$E\xi$ 有意义,又 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域,则对任一 $\mathscr{G}$ 可测函数 $\eta$,只要 $E\xi\eta$ 有意义,就有

(1.3.5) $$E(\xi\eta|\mathscr{G}) = \eta E(\xi|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

**证明** 分为三步:

1) 设 $\xi\geqslant0$ a. s.. 令

$$\mathscr{H} = \{\eta:\eta \geqslant 0, \text{关于 } \mathscr{G} \text{ 可测且(1.3.5) 成立}\}.$$

不难见对每 $A\in\mathscr{G}$,$I_A\in\mathscr{H}$ 且 $\mathscr{H}$ 是单调族. 故由定理 1.1.16 知此时(1.3.5)对任 $\mathscr{G}$ 可测之 $\eta\geqslant0$ a. s. 成立.

2) 设 $\xi\geqslant0$ a. s. ,$\eta$ 是一 $\mathscr{G}$ 可测函数,$E\xi\eta$ 有意义. 由于 $E\xi\eta=E\xi\eta^+-E\xi\eta^-$有意义,利用定理 1. 3. 2 以及第 1)步已证得之结论,有

$$E(\xi\eta|\mathscr{G})= E(\xi\eta^+ - \xi\eta^-|\mathscr{G}) = E(\xi\eta^+|\mathscr{G}) - E(\xi\eta^-|\mathscr{G})$$
$$= \eta^+ E(\xi|\mathscr{G}) - \eta^- E(\xi|\mathscr{G}) = \eta E(\xi|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

3) 考虑一般情况.

$$(\xi\eta)^+ = \xi^+\eta^+ + \xi^-\eta^-, \quad (\xi\eta)^- = \xi^+\eta^- + \xi^-\eta^+.$$

由于 $E\xi\eta$ 有意义,故或同时有 $E\xi^+\eta^+<\infty$和 $E\xi^-\eta^-<\infty$,或同时有 $E\xi^+\eta^-<\infty$和 $E\xi^-\eta^+<\infty$. 因而

$$E\xi^+\eta - E\xi^-\eta = (E\xi^+\eta^+ - E\xi^+\eta^-) - (E\xi^-\eta^+ - E\xi^-\eta^-)$$

总有意义. 于是利用定理 1. 3. 2,6)及已证之 2)得

$$E(\xi\eta|\mathscr{G})= E(\xi^+\eta - \xi^-\eta|\mathscr{G}) = E(\xi^+\eta|\mathscr{G}) - E(\xi^-\eta|\mathscr{G})$$
$$= \eta E(\xi^+|\mathscr{G}) - \eta E(\xi^-|\mathscr{G}) = \eta E(\xi|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.},$$

即(1.3.5)成立. 证完.

### 3.2 条件概率和正则条件分布

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是给定概率空间,$B\in\mathscr{F}$满足$P(B)>0$. 令$\mathscr{G}=\{\varnothing,B,B^c,\Omega\}$. 对$A\in\mathscr{F}$,不难由定义1.3.1直接计算出

$$E(I_A|\mathscr{G})(\omega)=\begin{cases}P(A\cap B)/P(B), & \omega\in B,\\ P(A\cap B^c)/P(B^c), & \omega\in B^c.\end{cases}$$

由此可见,$I_A$关于上述$\mathscr{G}$的条件期望在$B$上的值恰好就是初等概率论中在$B$发生的条件下事件$A$发生的概率. 由此引发出条件概率的定义如下.

**定义 1.3.2** 设$A\in\mathscr{F}$,$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$域. 称

(1.3.6) $$P(A|\mathscr{G})=E(I_A|\mathscr{G})$$

为事件$A$关于$\mathscr{G}$的条件概率.

因为条件概率是借助于一个可积r.v. $I_A$的条件期望定义的,故作为命题1.3.1、定理1.3.2和定理1.3.3的推论,可直接写出下列结论.

**命题 1.3.5** 事件$A$关于子$\sigma$域$\mathscr{G}$的条件概率$P(A|\mathscr{G})$是一个$\mathscr{G}$可测函数,而且对每$B\in\mathscr{G}$,

(1.3.7) $$P(A\cap B)=\int_B P(A|\mathscr{G})\mathrm{d}P.$$

**命题 1.3.6** 设$A_n\in\mathscr{F}$,$n\geqslant1$,又$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$域,我们有

1) $P(\varnothing|\mathscr{G})=0$ a.s.; $P(\Omega|\mathscr{G})=1$ a.s.;

2) $A_1\subset A_2$,则$P(A_1|\mathscr{G})\leqslant P(A_2|\mathscr{G})$ a.s.;

3) 如当$i\neq j$时,$A_i\cap A_j=\varnothing$,则

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n|\mathscr{G}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n|\mathscr{G})\quad \text{a.s.};$$

4) 如对每$n\geqslant1$,$A_n\subset A_{n+1}$或对每$n\geqslant1$,$A_n\supset A_{n+1}$,则

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n|\mathscr{G})=\lim_{n\to\infty}P(A_n|\mathscr{G})\quad \text{a.s.}.$$

从命题 1.3.6 可见，对于$(\Omega,\mathscr{F},P)$上一个给定的子$\sigma$域$\mathscr{G}$，$\{P(A|\mathscr{G}),A\in\mathscr{F}\}$很有那么一点概率测度的味道. 于是人们要问：对每$A\in\mathscr{F}$，确定一个条件概率$P(A|\mathscr{G})$之后，是不是可以找到一个$\mathscr{G}$中的零测集$Z$，使得当$\omega\notin Z$时，$P(\cdot|\mathscr{G})(\omega)$作为$\mathscr{F}$上的集函数是一个概率测度？如果回答是肯定的，我们将可获得许多好处，见下面的定理 1.3.7 及其推论. 有点遗憾的是，对这个问题的回答并不是无条件地肯定的. 正是因为如此，引起了关于正则条件概率和正则条件分布的一系列讨论.

**定义 1.3.3** 设$\mathscr{G}$和$\mathscr{F}_0$都是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的子$\sigma$域. 定义在$\mathscr{F}_0\times\Omega$上的函数$P(\cdot,\cdot)=\{P(A,\omega):A\in\mathscr{F}_0,\omega\in\Omega\}$称为$\mathscr{F}_0$上关于$\mathscr{G}$的正则条件概率，如果对每$\omega\in\Omega$，$P(\cdot,\omega)$是$\mathscr{F}_0$上的概率测度，对每$A\in\mathscr{F}_0$，$P(A,\cdot)$是事件$A$关于$\mathscr{G}$的条件概率. 如果$\xi$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(X,\mathscr{B})$的随机元，那么$\sigma(\xi)$上关于$\mathscr{G}$的正则条件概率也叫做$\xi$关于$\mathscr{G}$的正则条件概率.

**定义 1.3.4** 设$\mathscr{G}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$的子$\sigma$域，$\xi$是取值于可测空间$(X,\mathscr{B})$的随机元. 定义在$\mathscr{B}\times\Omega$上的函数$P_\xi(\cdot,\cdot)=\{P_\xi(B,\omega):B\in\mathscr{B},\omega\in\Omega\}$称为$\xi$关于$\mathscr{G}$的正则条件分布，如对每$\omega\in\Omega$，$P_\xi(\cdot,\omega)$是$\mathscr{B}$上的概率测度，对每$B\in\mathscr{B}$，$P_\xi(B,\cdot)$是$\xi^{-1}B$关于$\mathscr{G}$的条件概率.

不难看出，一个随机元$\xi$关于一个子$\sigma$域的正则条件概率$P(\cdot,\cdot)$如果存在，那么对每$B\in\mathscr{B}$和$\omega\in\Omega$，令

$$P_\xi(B,\omega)=P(\xi^{-1}B,\omega), \tag{1.3.8}$$

则$P_\xi(\cdot,\cdot)$就是$\xi$关于$\mathscr{G}$的正则条件分布. 下面的定理 1.3.7 我们将只证明其关于正则条件分布的那一部分；关于正则条件概率的部分可以通过前一部分的结果和(1.3.8)式而得到. 请读者自己完成.

**定理 1.3.7** 设$\xi$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(X,\mathscr{B})$的随机元，$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$域，$\eta$是$(\Omega,\mathscr{G},P)$到可测空间$(Y,\mathscr{S})$的

随机元，$f(\cdot,\cdot)$是乘积空间$(X\times Y,\mathscr{B}\times\mathscr{S})$上的可测函数.如果$\xi$关于$\mathscr{G}$的正则条件分布$P_\xi(\cdot,\cdot)$存在，则下式

$$(1.3.9)\qquad E[f(\xi,\eta)|\mathscr{G}](\cdot)=\int_X f(x,\eta(\cdot))P_\xi(\mathrm{d}x,\cdot)\quad \text{a.s.}$$

之一端有意义时成立；如果$\xi$关于$\mathscr{G}$的正则条件概率$P(\cdot,\cdot)$存在，则下式

$$(1.3.10)\qquad E[f(\xi,\eta)|\mathscr{G}](\cdot)=\int_\Omega f(\xi(\omega),\eta(\cdot))P(\mathrm{d}\omega,\cdot)\quad \text{a.s.}$$

之一端有意义时成立.

**证明** 我们只证(1.3.9)式.为此，令

$$\mathscr{E}=\{B\times S:B\in\mathscr{B},S\in\mathscr{S}\}.$$

对任$U\in\mathscr{E}$，表$U=B\times S$，其中$B\in\mathscr{B},S\in\mathscr{S}$.当$f=I_U$时，利用(1.3.5)可得

$$\begin{aligned}E[f(\xi,\eta)|\mathscr{G}](\cdot)&=P(\xi\in B,\eta\in S|\mathscr{G})(\cdot)\\&=I_{\{\eta\in S\}}(\cdot)P(\xi\in B|\mathscr{G})(\cdot)\\&=I_S(\eta(\cdot))P_\xi(B,\cdot)\\&=\int_X I_S(\eta(\cdot))I_B(x)P_\xi(\mathrm{d}x,\cdot)\\&=\int_X f(x,\eta(\cdot))P_\xi(\mathrm{d}x,\cdot)\quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

即(1.3.9)成立.不难验证，$\mathscr{E}$是一个$\pi$系而且$\sigma(\mathscr{E})=\mathscr{B}\times\mathscr{S}$.又不难验证

$$\mathscr{L}=\{f\geqslant 0:f\text{ 关于 }\mathscr{B}\times\mathscr{S}\text{ 可测且(1.3.9)成立}\}$$

是一个$\lambda$族.据典型方法(定理1.1.17)，(1.3.9)对一切非负$\mathscr{B}\times\mathscr{S}$可测函数成立，从而只要$\mathscr{B}\times\mathscr{S}$可测函数$f$使其一端有意义，另一端也就有意义而且等号成立.证完.

作为上述定理的特例，我们得

**系 1.3.8** 设$\xi$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数，$\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$域.如果$\xi$关于$\mathscr{G}$的正则条件分布$P_\xi(\cdot,\cdot)$存在，则

下式

$$(1.3.11)\qquad E(\xi|\mathscr{G})(\cdot)=\int_X xP_\xi(\mathrm{d}x,\cdot)\quad \text{a.s.}$$

之一端有意义时成立;如果 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率 $P(\cdot,\cdot)$ 存在,则

$$(1.3.12)\qquad E(\xi|\mathscr{G})(\cdot)=\int_\Omega \xi(\omega)P(\mathrm{d}\omega,\cdot)\quad \text{a.s.}$$

之一端有意义时成立.

利用定理 1.3.7 还容易证明

**系 1.3.9** 设 $\mathscr{F}_0$ 和 $\mathscr{G}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的子 $\sigma$ 域,$\xi$ 和 $\eta$ 分别是$(\Omega,\mathscr{F}_0,P)$到可测空间$(X,\mathscr{B})$和$(\Omega,\mathscr{G},P)$到$(Y,\mathscr{S})$的随机元,$f$ 是乘积空间$(X\times Y,\mathscr{B}\times\mathscr{S})$上的可测函数.如果 $\mathscr{F}_0$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率存在,则(1.3.10)之一端有意义时,它就一定成立;特别地,(1.3.12)只要其一端有意义就成立.

公式(1.3.9)—(1.3.12)是这样的意思:如果 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布或正则条件概率存在,那么 $\xi$ 和它的函数关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望就可分别表为对正则条件分布或正则条件概率的积分.它们的作用和(1.1.2),(1.1.3)在研究普通期望时的作用一样,是十分重要的.

### 3.3 正则条件分布的存在性

我们将首先讨论 r.v. 关于一个子 $\sigma$ 域的正则条件分布的存在性.

**引理 1.3.10** 设 $\xi$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v. ,$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域,则 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布存在.

**证明** 以 $\Gamma$ 记全体有理数,对每 $r\in\Gamma$,取定一个条件概率 $P(\xi\leqslant r|\mathscr{G})(\cdot)$(按定义 1.3.2,条件概率可以是一族相互之间只在 $\mathscr{G}$ 的一个零测集上有差别的可测函数中的任何一个,故有取定

一个之说). 令

$$Z_1 = \bigcup_{r_1 \leqslant r_2, r_1, r_2 \in \Gamma} \{\omega: P(\xi \leqslant r_1 | \mathscr{G})(\omega) > P(\xi \leqslant r_2 | \mathscr{G})(\omega)\};$$

$$Z_2 = \bigcup_{r \in \Gamma} \{\omega: \lim_{n\to\infty} P(\xi \leqslant r + 1/n | \mathscr{G})(\omega) \neq P(\xi \leqslant r | \mathscr{G})(\omega)\};$$

$$Z_3 = \{\omega: \lim_{n\to\infty} P(\xi \leqslant n | \mathscr{G})(\omega) \neq 1\} \cup \{\omega: \lim_{n\to\infty} P(\xi \leqslant -n | \mathscr{G})(\omega) \neq 0\},$$

则对 $i=1,2,3$ 均有 $Z_i \in \mathscr{G}$ 且 $P(Z_i)=0$. 再令 $Z = \bigcup_{i=1}^{3} Z_i$, 即知 $Z \in \mathscr{G}$ 且 $P(Z)=0$.

任意取定一个 d.f. $G$,然后对每 $x \in R$ 令

$$F(x,\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{r\in\Gamma, r\downarrow x} P(\xi \leqslant x | \mathscr{G})(\omega), & \omega \in Z^c, \\ G(x), & \omega \in Z. \end{cases}$$

则对每 $\omega \in \Omega$, $F(\cdot,\omega)$是一个 d.f.. 再对每 $\omega \in \Omega$,以 $P_\xi(\cdot,\omega)$记 $F(\cdot,\omega)$对应的 L-S 测度. 往证 $P_\xi(\cdot,\cdot)$是 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布.

显然,对每 $\omega \in \Omega$, $P_\xi(\cdot,\omega)$是 $\mathscr{R}$ 上的概率测度. 因此只需再证,对每 $B \in \mathscr{R}$, $P_\xi(B,\cdot)$是 $\xi^{-1}B$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件概率,即 $P_\xi(B,\cdot)$关于 $\mathscr{G}$ 可测且

$$P(A \cap \xi^{-1}B) = \int_A P_\xi(B,\omega)P(\mathrm{d}\omega) \tag{1.3.13}$$

对每 $A \in \mathscr{G}$ 成立. 令

$\mathscr{J} = \{B \in \mathscr{R}: P_\xi(B,\cdot)$ 关于 $\mathscr{G}$ 可测且(1.3.13) 对每 $A \in \mathscr{G}$ 成立$\}$;

$$\mathscr{E} = \{(-\infty, r]: r \in \Gamma\}.$$

不难验证:$\mathscr{E}$ 是 $\pi$ 系,$\mathscr{J}$ 是 $\lambda$ 系而且 $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{R}$. 于是由定理 1.1.15 得 $\mathscr{J} \supset \mathscr{R}$. 证完.

其次,我们用上述特殊结论来证明一个一般的结论.

**定理 1.3.11** 若 $\xi$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到完备可分距离可测空间$(X,\mathscr{B})$的随机元,则 $\xi$ 关于 $\mathscr{F}$ 的任一子 $\sigma$ 域 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布存在.

**证明** 由定理 1.2.15，存在 $B\in\mathscr{R}$ 使 $(X,\mathscr{B})\sim(B,B\cap\mathscr{R})$. 把从 $(X,\mathscr{B})$ 到 $(B,B\cap\mathscr{R})$ 的等价映射记作 $f$，则 $f(\xi)$ 是一 r.v.. 据引理 1.3.10，$f(\xi)$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布存在，记作 $P_{f(\xi)}(\cdot,\cdot)$. 对每 $A\in\mathscr{B},\omega\in\Omega$，令

$$P_\xi(A,\omega)=P_{f(\xi)}(f(A),\omega).$$

不难验证，$P_\xi(\cdot,\cdot)$ 就是 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布. 证完.

由于 $\boldsymbol{R}^k,\boldsymbol{R}^\infty$ 都是完备可分距离空间，作为定理 1.3.11 之直接推论，我们得

**系 1.3.12** 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 $k$ 维随机向量关于 $\mathscr{F}$ 的任一子 $\sigma$ 域的正则条件分布存在.

**系 1.3.13** 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上随机变量序列关于 $\mathscr{F}$ 的任一子 $\sigma$ 域的正则条件分布存在.

前面说过，如果一个随机元关于某子 $\sigma$ 域的正则条件概率存在，那么相应的正则条件分布亦存在. 下面考虑逆命题. 我们将看到，如果正则条件分布存在，那么在并非十分苛刻的条件下，相应的正则条件概率也存在.

**定理 1.3.14** 设 $\xi$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 的随机元，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域. 如果 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布存在而且

$$\xi(\Omega)=:\{\xi(\omega):\omega\in\Omega\}\in\mathscr{B},$$

则 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率亦存在.

**证明** 设 $P_\xi(\cdot,\cdot)$ 是 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布，则由正则条件分布的定义知

$$P_\xi(\xi(\Omega),\cdot)=P(\xi\in\xi(\Omega)|\mathscr{G})(\cdot)=P(\Omega|\mathscr{G})(\cdot)=1\quad \text{a.s.},$$

令 $Z=\{\omega:P_\xi(\xi(\Omega),\omega)\neq 1\}$，则 $Z\in\mathscr{G}$ 且 $P(Z)=0$. 对每 $A\in\sigma(\xi)$，取 $B\in\mathscr{B}$ 使 $A=\xi^{-1}B$ 并令

$$P(A,\omega)=\begin{cases}P_\xi(B,\omega), & \omega\in Z^c,\\ P(A), & \omega\in Z.\end{cases}\tag{1.3.14}$$

往证上述定义是一意的. 当 $\omega\in Z$,这是显然的. 当 $\omega\in Z^c$ 时,如 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$ 使 $\xi^{-1}B_1=\xi^{-1}B_2$,则

$$\xi^{-1}(B_1\triangle B_2)=(\xi^{-1}B_1)\triangle(\xi^{-1}B_2)=\varnothing,$$

亦即 $B_1\triangle B_2\subset(\xi(\Omega))^c$. 因而

$$P_\xi(B_1\triangle B_2,\omega)\leqslant P_\xi((\xi(\Omega))^c,\omega)=0$$

并由此得 $P_\xi(B_1,\omega)=P_\xi(B_2,\omega)$,(1.3.14)的一意性证毕. 进一步不难验证(1.3.14)确定的 $P(\cdot,\cdot)$满足正则条件概率定义的要求,从而完成定理的证明.

最后我们说明,如果基础概率空间是完备可分距离空间,那么正则条件概率一定存在.

**系 1.3.15** 设$(X,\mathscr{B})$是完备可分距离可测空间,则概率空间$(X,\mathscr{B},P)$上任一子 $\sigma$ 域 $\mathscr{B}_0$ 关于另一子 $\sigma$ 域 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率存在.

**证明** 定义$(X,\mathscr{B},P)$到$(X,\mathscr{B})$的随机元

$$\xi(x)=x,\quad x\in X.$$

由定理 1.3.11,$\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布存在. 由于 $\xi$ 的值域 $\xi(X)=X$而 $X\in\mathscr{B}$,故引用定理 1.3.14 又知 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率 $P(\cdot,\cdot)$存在. 但是 $\sigma(\xi)=\mathscr{B}$,故 $P(\cdot,\cdot)$也就是 $\mathscr{B}$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率. 把 $P(\cdot,\cdot)$限制在 $\mathscr{B}_0$ 上,即$\{P(B,\omega):B\in\mathscr{B}_0,\omega\in\Omega\}$便是 $\mathscr{B}_0$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件概率. 证完.

### 3.4 条件不等式

我们将推广定理 1.1.4—定理 1.1.7 到条件期望的情形,其中正则条件分布的存在性起了重要作用.

**定理 1.3.16**(条件 Jensen 不等式) 设 $g$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上连续凸函数,$\xi$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数使得对于 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域 $\mathscr{G}$,$E(\xi|\mathscr{G})$和 $E(g(\xi)|\mathscr{G})$均有定义,则

$$g(E(\xi|\mathscr{G}))\leqslant E[g(\xi)|\mathscr{G}]\quad \text{a.s.}. \tag{1.3.15}$$

**证明** 如果 $\xi$ 是r.v.,则由引理1.3.10知它关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布 $P_\xi(\cdot,\cdot)$ 存在. 利用系1.3.8,定理1.1.4和定理1.3.7立得

$$g(E(\xi|\mathscr{G})(\cdot)) = g(\int_R xP_\xi(\mathrm{d}x,\cdot)) \leqslant \int_R g(x)P_\xi(\mathrm{d}x,\cdot)$$
$$= E[g(\xi)|\mathscr{G}](\cdot) \quad \text{a.s.},$$

即(1.3.15)成立.

如果 $\xi$ 是一可测函数,那么对任 $M>0$,令

$$A(M) = \{\omega: E(\xi^+|\mathscr{G})(\omega) \leqslant M, E(\xi^-|\mathscr{G})(\omega) \leqslant M\},$$

则 $E\xi^\pm I_{A(M)} = E[I_{A(M)}E(\xi^\pm|\mathscr{G})] \leqslant M < \infty$,从而 $|\xi I_{A(M)}| < \infty$ a.s.. 因此可认为 $\xi I_{A(M)}$ 是一个r.v.. 对 $\xi I_{A(M)}$ 用已证之结论便有

$$I_{A(M)}g(E(\xi|\mathscr{G})) + I_{A^c(M)}g(0) = g(E(\xi I_{A(M)}|\mathscr{G})) \leqslant E[g(\xi I_{A(M)})|\mathscr{G}]$$
$$= I_{A(M)}E[g(\xi)|\mathscr{G}] + I_{A^c(M)}g(0) \quad \text{a.s.},$$

亦即

$$I_{A(M)}g(E(\xi|\mathscr{G})) \leqslant I_{A(M)}E(g(\xi)|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

上式令 $M\to\infty$,我们得

$$(1.3.16) \qquad I_A g(E(\xi|\mathscr{G})) \leqslant I_A E(g(\xi)|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.},$$

其中 $A = \{\omega: E(\xi^+|\mathscr{G})(\omega) < \infty, E(\xi^-|\mathscr{G})(\omega) < \infty\}$.

记 $B = \{\omega: E(\xi^+|\mathscr{G})(\omega) = \infty, E(\xi^-|\mathscr{G})(\omega) < \infty\}$. 如果对每 $x\in\boldsymbol{R}$,(1.1.4)中之 $h(x)\leqslant 0$,那么 $g$ 非增,从而

$$I_B g(E(\xi|\mathscr{G})) = I_B g(\infty) \leqslant I_B E(g(\xi)|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

如果对(1.1.4)中之 $h$,存在 $x_0\in\boldsymbol{R}$ 使 $h(x_0)>0$,那么由(1.1.4)可得 $g(\infty)=\infty$ 及

$$g(\xi) \geqslant g(x_0) + (\xi - x_0)h(x_0).$$

这又进而推知

$$I_B E[g(\xi)|\mathscr{G}] \geqslant I_B[g(x_0) + h(x_0)E(\xi - x_0|\mathscr{G})]$$
$$\geqslant I_B\cdot\infty = I_B g(\infty) \geqslant I_B g(E(\xi|\mathscr{G})) \quad \text{a.s.}.$$

总之,我们有

(1.3.17) $\quad I_B g(E(\xi|\mathscr{G})) \leqslant I_B E[g(\xi)|\mathscr{G}]$ a.s..

记 $C=\{\omega: E(\xi^+|\mathscr{G})(\omega)<\infty, E(\xi^-|\mathscr{G})(\omega)=\infty\}$. 类似于(1.3.17)之证，可得

(1.3.18) $\quad I_C g(E(\xi|\mathscr{G})) \leqslant I_C E[g(\xi)|\mathscr{G}]$ a.s..

把(1.3.16)—(1.3.18)合并，得(1.3.15). 证完.

**定理 1.3.17**（条件 Hölder 不等式） 设 $\xi,\eta$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上之可测函数，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域，实数 $p,q$ 满足 $1<p,q<\infty$ 和 $1/p+1/q=1$，则

(1.3.19) $E(|\xi\eta||\mathscr{G}) \leqslant E^{1/p}(|\xi|^p|\mathscr{G})\cdot E^{1/q}(|\xi|^q|\mathscr{G})$ a.s..

**证明** 如 $\xi,\eta$ 是 r.v.，由系 1.3.12 知，$(\xi,\eta)$关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布 $P_{\xi,\eta}(\cdot,\cdot)$存在. 对每 $B\in\mathscr{R}$，令 $P_\xi(B,\cdot)=P_{\xi,\eta}(B\times R,\cdot)$，$P_\eta(B,\cdot)=P_{\xi,\eta}(R\times B,\cdot)$，不难验证，$P_\xi(\cdot,\cdot)$和$P_\eta(\cdot,\cdot)$分别是 $\xi$ 和 $\eta$ 关于 $\mathscr{G}$ 的正则条件分布. 于是由定理1.3.7和定理 1.1.5 得

$$
\begin{aligned}
E(|\xi\eta||\mathscr{G})(\cdot) &= \iint_{R^2} |xy| P_{\xi,\eta}(\mathrm{d}x\times\mathrm{d}y,\cdot) \\
&\leqslant \left[\iint_{R^2} |x|^p P_{\xi,\eta}(\mathrm{d}x\times\mathrm{d}y,\cdot)\right]^{1/p}\left[\iint_{R^2} |y|^q P_{\xi,\eta}(\mathrm{d}x\times\mathrm{d}y,\cdot)\right]^{1/q} \\
&= \left[\int_R |x|^p P_\xi(\mathrm{d}x,\cdot)\right]^{1/p}\left[\int_R |y|^q P_\eta(\mathrm{d}y,\cdot)\right]^{1/q} \\
&= E^{1/p}(|\xi|^p|\mathscr{G})(\cdot)E^{1/q}(|\eta|^q|\mathscr{G})(\cdot) \quad \text{a.s.},
\end{aligned}
$$

即(1.3.19)成立.

设 $\xi,\eta$ 是一般可测函数，对每 $M>0$，令

$$
A_M=\{\omega: E(|\xi|^p|\mathscr{G})(\omega)\leqslant M\};
$$

$$
B_M=\{\omega: E(|\eta|^q|\mathscr{G})(\omega)\leqslant M\},
$$

则 $E|\xi|^p I_{A_M}<\infty$，$E|\eta|^q I_{B_M}<\infty$. 因而引用对 r.v. 已证之(1.3.19)式得

$$I_{A_M}I_{B_M}E(|\xi\eta||\mathscr{G}) = E(|\xi I_{A_M}\eta I_{B_M}||\mathscr{G})$$
$$\leqslant E^{1/p}(|\xi|^p I_{A_M}|\mathscr{G})E^{1/q}(|\eta|^q I_{B_M}|\mathscr{G})$$
$$= I_{A_M}I_{B_M}E^{1/p}(|\xi|^p|\mathscr{G})E^{1/q}(|\eta|^q|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

上式中令 $M\to\infty$ 便有

$$I_A I_B E(|\xi\eta||\mathscr{G}) \leqslant I_A I_B E^{1/p}(|\xi|^p|\mathscr{G})E^{1/q}(|\eta|^q|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.},$$

其中 $A=\{\omega: E(|\xi|^p|\mathscr{G})(\omega)<\infty\}$, $B=\{\omega: E(|\eta|^q|\mathscr{G})(\omega)<\infty\}$. 不难见下列两式总是成立的：

$$I_{A^c}E(|\xi\eta||\mathscr{G}) \leqslant I_{A^c}E^{1/p}(|\xi|^p|\mathscr{G})E^{1/q}(|\eta|^q|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.};$$
$$I_{B^c}E(|\xi\eta||\mathscr{G}) \leqslant I_{B^c}E^{1/p}(|\xi|^p|\mathscr{G})E^{1/q}(|\eta|^q|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

因此(1.3.19)对一般可测函数亦成立. 证完.

**系 1.3.18**(条件矩不等式) 设 $\xi$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数,$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域,则对任何正实数 $s<t$,有

$$E^{1/s}(|\xi|^s|\mathscr{G}) \leqslant E^{1/t}(|\xi|^t|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

**定理 1.3.19**(条件 Minkowski 不等式) 设 $\xi,\eta$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v.,$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域,则

1) 当 $p\geqslant 1$ 时,

$$E^{1/p}(|\xi+\eta|^p|\mathscr{G}) \leqslant E^{1/p}(|\xi|^p|\mathscr{G}) + E^{1/p}(|\eta|^p|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.};$$

2) 当 $0<p<1$ 且 $E(|\xi|^p+|\eta|^p)<\infty$ 时,

$$E(|\xi+\eta|^p|\mathscr{G}) \leqslant E(|\xi|^p|\mathscr{G}) + E(|\eta|^p|\mathscr{G}) \quad \text{a.s.}.$$

系 1.3.18 和定理 1.3.19 可用类似于定理 1.3.17 的方法来证明,故略去.

### 3.5 关于随机元取给定值的条件期望和条件概率

设 $\xi$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数,$\eta$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(Y,\mathscr{S})$的随机元. 如果 $\xi$ 关于子 $\sigma$ 域 $\sigma(\eta)$ 的条件期望 $E(\xi|\sigma(\eta))$ 有定义,那么很自然地把它称为 $\xi$ 关于随机元 $\eta$ 的条件期望并采用更简单的记号:

$$E(\xi|\eta) := E(\xi|\sigma(\eta)).$$

由于 $E(\xi|\eta)$是 $\eta^{-1}\mathscr{S}=\sigma(\eta)$可测函数，故由定理 1.1.1 得知，存在$(Y,\mathscr{S})$上的可测函数 $f$，使对每 $\omega\in\Omega$，

$$f(\eta(\omega)) = E(\xi|\eta)(\omega). \tag{1.3.20}$$

而且如果 $\xi$ 是非负的，那么由条件期望的定义，式(1.3.20)和定理 1.1.2 还可以得到：对每 $S\in\mathscr{S}$，

$$\int_{\eta^{-1}S}\xi\mathrm{d}P = \int_{\eta^{-1}S}E(\xi|\eta)\mathrm{d}P = \int_{\eta^{-1}S}f(\eta)\mathrm{d}P = \int_S f\mathrm{d}P\eta^{-1}.$$

$\xi$ 关于 $\eta$ 的条件期望对于测度 $P$ 在 a. s. 意义下是唯一的. 因此，相应的 $f$ 对于 $P\eta^{-1}$也是 a. s. 唯一的. 下面，我们将用符号 $E(\xi|\eta=y)$来记上述 $f$ 在 $y$ 处的值并把它定义为 $\xi$ 关于 $\eta$ 的给定值 $y$ 的条件期望.

**定义 1.3.5** 设 $\xi$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非负可测函数，$\eta$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(Y,\mathscr{S})$的随机元. $(Y,\mathscr{S},P\eta^{-1})$上的可测函数 $E(\xi|\eta=\cdot)$如满足

$$\int_{\eta^{-1}S}\xi\mathrm{d}P = \int_S E(\xi|\eta=y)P\eta^{-1}(\mathrm{d}y), \quad S\in\mathscr{S}, \tag{1.3.21}$$

则称之为 $\xi$ 关于 $\eta$ 的给定值的条件期望；如 $\xi$ 是满足条件

$$\min(E(\xi^+|\eta=\cdot),E(\xi^-|\eta=\cdot)) < \infty \quad \text{a.s.}\ P\eta^{-1}$$

的可测函数，则称符合

$$E(\xi|\eta=\cdot) = E(\xi^+|\eta=\cdot) - E(\xi^-|\eta=\cdot) \quad \text{a.s.}\ P\eta^{-1}$$

的 $\sigma(\eta)$可测函数 $E(\xi|\eta=\cdot)$为 $\xi$ 关于 $\eta$ 的给定值的条件期望；若 $A\in\mathscr{F}$，特别地称

$$P(A|\eta=\cdot) = E(I_A|\eta=\cdot)$$

为事件 $A$ 关于 $\eta$ 的给定值的条件概率.

不难看出，命题 1.3.1 至命题 1.3.6 之间的所有对于"$\xi$ 关于子 $\sigma$ 域 $\mathscr{G}$"的条件期望或条件概率的结论，对于"$\xi$ 关于随机元的给定值"的条件期望或条件概率也是成立的. 这里就不一一列举

了.

**定义 1.3.6** 设 $\eta$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(Y,\mathscr{S})$ 的随机元，$\mathscr{F}_0$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域. 定义在 $\mathscr{F}_0\times Y$ 上的函数 $P^{\eta}(\cdot,\cdot)=\{P^{\eta}(A,y):A\in\mathscr{F}_0,y\in Y\}$ 称为 $\mathscr{F}_0$ 上关于 $\eta$ 的给定值的正则条件概率，如果对每 $y\in Y$，$P^{\eta}(\cdot,y)$ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的概率测度，对每 $A\in\mathscr{F}_0$，$P^{\eta}(A,\cdot)$ 是 $A$ 关于 $\eta$ 的给定值的条件概率. 如果 $\xi$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 的随机元，那么 $\sigma(\xi)$ 上关于 $\eta$ 的给定值的正则条件概率称为 $\xi$ 关于 $\eta$ 的给定值的正则条件概率.

**定义 1.3.7** 设 $\xi$ 和 $\eta$ 分别是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 和 $(Y,\mathscr{S})$ 的随机元. 如果存在 $\mathscr{B}\times Y$ 上定义的函数 $P_{\xi}^{\eta}(\cdot,\cdot)=\{P_{\xi}^{\eta}(B,y):B\in\mathscr{B},y\in Y\}$ 使得对每 $Y\in\mathscr{S}$，$P_{\xi}^{\eta}(\cdot,y)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的概率测度，对每 $B\in\mathscr{B}$. $P_{\xi}^{\eta}(B,\cdot)$ 是 $\xi^{-1}B$ 关于 $\eta$ 的给定值的条件概率，则称之为 $\xi$ 关于 $\eta$ 的给定值的正则条件分布.

不难验证，从定理 1.3.7 到定理 1.3.19 的所有结论亦可写成"关于 $\eta$ 的给定值"的条件期望和条件概率的形式，我们无必要把它们都写一遍.

## 习 题 1.3

1. 设 $\{A_n,n\geqslant1\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的一个可测分割，即 $\{A_n,n\geqslant1\}$ 是 $\Omega$ 的分割并且对每 $n\geqslant1$，$A_n\in\mathscr{F}$. 记 $\mathscr{G}=\sigma(\{A_n,n\geqslant1\})$.

(1) 试问可测函数 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在的必要充分条件是什么?

(2) 如果可测函数 $\xi$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望存在，求出这个条件期望.

(3) 求事件 $A$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件概率.

2. 设 $\xi$ 遵从标准正态 d.f.

$$\Phi(x) =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

求 $E(\xi \mid |\xi|)$.

3. 设 $\xi$ 是对称 r. v. ,即

$$P(\xi \leqslant x) = P(-\xi \leqslant x), \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

又设 $A>0$ 和 $E|\xi|<\infty$,求 $E(\xi \mid \xi I_{(|\xi| \leqslant A)})$.

4. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立同分布之 r. v. ,$E|\xi_1|<\infty$. 记 $S=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. 证明

$$E(\xi_k \mid S) = S/n \quad \text{a.s.}, \quad k = 1,\cdots,n.$$

5. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立 r. v. ,以[0,1]上的均匀分布为共同分布,求 $E\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i/n \mid \max_{1\leqslant i\leqslant n}\xi_i\right)$.

6. 证明命题 1. 3. 1.

7. 设随机向量$(\xi,\eta)$遵从非退化的二维正态分布,即其密度函数为

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

求 $\xi$ 关于 $\eta$ 的条件期望.

8. 设随机向量 $\xi' = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$遵从 $n$ 维非退化的正态分布,它有密度函数

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}x'\Sigma^{-1}x\right), \quad x' = (x_1,\cdots,x_n) \in \boldsymbol{R}^n.$$

求 $P(\xi_1 \leqslant x_1,\cdots,\xi_n \leqslant x_n \mid \xi'\Sigma^{-1}\xi)$.

9. 设 $\xi,\eta \in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$. 证明:如果

$$E(\eta \mid \xi) = E\eta \quad \text{a.s.},$$

则必有 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$.

10. 举例说明存在这样的 r. v. $\xi,\eta\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$，虽然 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$，但 $E(\eta|\xi)=E\eta$ a.s. 并不成立；虽然 $E(\eta|\xi)=E\eta$ a.s.，但 $\xi,\eta$ 并不独立.

11. 设 $\xi\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 代数. 试证 $\eta\in L_2(\Omega,\mathscr{G},P)$ 使 $E(\xi-\eta)^2$ 达到极小的充分必要条件是 $\eta=E(\xi|\mathscr{G})$.

12. 设 $\xi\in L_2(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域. 称

$$\mathrm{var}(\xi|\mathscr{G})=E\{[\xi-E(\xi|\mathscr{G})]^2|\mathscr{G}\}$$

为 $\xi$ 关于 $\eta$ 的条件方差.

(1) 证明公式

$$\mathrm{var}(\xi|\mathscr{G})=E(\xi^2|\mathscr{G})-E^2(\xi|\mathscr{G})\ \text{a.s.}.$$

(2) 证明条件 Chebyshev 不等式：对每 $\varepsilon>0$，

$$P(|\xi-E(\xi|\mathscr{G})|\geqslant\varepsilon|\mathscr{G})\leqslant\mathrm{var}(\xi|\mathscr{G})/\varepsilon^2\quad\text{a.s.}.$$

13. 证明命题 1.3.5.

14. 证明命题 1.3.6.

15. 设 $\xi$ 和 $\eta$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 分别到可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 和 $(Y,\mathscr{S})$ 的随机元，$\xi$ 和 $\eta$ 独立. 又设 $f$ 是 $(X,\mathscr{B})\times(Y,\mathscr{S})$ 上的可测函数，$Ef(\xi,\eta)$ 有意义. 证明

$$E[f(\xi,\eta)|\eta]=\int_X f(x,\eta)P\xi^{-1}(\mathrm{d}x)\quad\text{a.s.}.$$

16. 设 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{F}_t,t\in T$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的子 $\sigma$ 域. 称 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立，如对任 $n\geqslant2$，任 $t_1,\cdots,t_n\in T$ 及任 $A_k\in\mathscr{F}_{t_k},k=1,\cdots,n$，有

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^n A_k|\mathscr{G}\Big)=\prod_{k=1}^n P(A_k|\mathscr{G}).$$

称随机元族 $\{\xi_t,t\in T\}$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立，如 $\{\sigma(\xi_t),t\in T\}$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立. 试证明下列命题等价：

(1) $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立；

(2) 对每 $A_1\in\mathscr{F}_1$，$P(A_1|\sigma(\mathscr{F}_2\cup\mathscr{G}))=P(A_1|\mathscr{G})$ a.s.；

(3) 对每 $A_2\in\mathscr{F}_2$，$P(A_2|\sigma(\mathscr{F}_1\cup\mathscr{G}))=P(A_2|\mathscr{G})$ a.s.；

(4) 对每非负 $\mathscr{F}_1$ 可测之 r.v. $\xi$，

$$E(\xi|\sigma(\mathscr{F}_2\cup\mathscr{G}))=E(\xi|\mathscr{G})\quad\text{a.s.;}$$

(5) 对每非负 $\mathscr{F}_2$ 可测之 r.v. $\eta$，

$$E(\eta|\sigma(\mathscr{F}_1\cup\mathscr{G}))=E(\eta|\mathscr{G})\quad\text{a.s..}$$

17. 设随机向量$(\xi,\eta)$有密度 $p(x,y)$，$x,y\in\boldsymbol{R}$. 求 $\xi$ 关于 $\eta$ 和 $\eta$ 关于 $\xi$ 的正则条件分布.

18. 叙述并证明关于随机元的给定值的定理 1.3.7，定理 1.3.11的翻版.

19. 设 $\mathscr{P}$ 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率测度族，$\mathscr{F}$ 的子 $\sigma$ 域 $\mathscr{G}$ 称为对 $\mathscr{P}$ 是充分的，如果对每 $A\in\mathscr{F}$，存在一个 $\mathscr{G}$ 可测函数 $f(A,\cdot)$使得对每 $P\in\mathscr{P}$ 均有

$$P(A|\mathscr{G})=f(A,\cdot)\quad\text{a.s.}$$

(对每 $P\in\mathscr{P}$，$P(A|\mathscr{G})$表示在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上，$A$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件概率)，$(\Omega,\mathscr{F})$到某可测空间$(X,\mathscr{B})$的可测变换 $\xi$ 称为是 $\mathscr{P}$ 的充分统计量，如果子 $\sigma$ 域 $\sigma(\xi)$对 $\mathscr{P}$ 是充分的. 证明：如果存在$(\Omega,\mathscr{F})$上的测度 $\mu$，$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$上的可积函数 $h$ 和 $\mathscr{G}$ 可测函数族$\{g_P,P\in\mathscr{P}\}$使每 $P\in\mathscr{P}$ 对 $\mu$ 绝对连续而且其 Radon-Nykodym 导数可表为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\mu}=g_Ph\quad\text{a.e.},$$

则 $\mathscr{G}$ 对于 $\mathscr{P}$ 是充分的.

20. 由定义直接验证：如果$(\boldsymbol{R}^k,\mathscr{R}^k)$上的概率测度族$\{P_\theta,\theta>0\}$由下式确定：

$$P_\theta(B)=\int\cdots\int_B g_\theta(x_1,\cdots,x_k)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k,\quad B\in\mathscr{R}^k,$$

其中

$$g_\theta(x_1,\cdots,x_k)=\begin{cases}\theta^k, & 0<x_1,\cdots,x_k<\theta.\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $\xi(x_1,\cdots,x_k)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} x_i$ 是 $\{P_\theta,\theta>0\}$ 的充分统计量.

21. 由定义直接验证：如果 $(\boldsymbol{R}^k,\mathscr{R}^k)$ 上的概率测度族 $\{P_{\mu,\sigma^2}:\mu\in\boldsymbol{R},\sigma^2>0\}$ 由下式确定

$$P_{\mu,\sigma^2}(B)=\int\cdots\int\limits_B\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2}\mathrm{e}^{\frac{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k,\quad B\in\mathscr{R}^k,$$

则 $\left(\sum\limits_{i=1}^{k}x_i,\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2\right)$ 是 $\{P_{\mu,\sigma^2}:\mu\in\boldsymbol{R},\sigma^2>0\}$ 的充分统计量.

## 第四节 距离空间的概率测度

### 4.1 距离空间上概率测度的性质

以 $\mathscr{O}$,$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别记距离空间 $(X,\rho)$ 之开集系，闭集系和 Borel 集系. 距离空间 $X$ 上的概率测度乃是指可测空间 $(X,\mathscr{B})$ 上之概率测度.

**定理 1.4.1** 设 $\mu$ 是距离空间 $(X,\rho)$ 上之概率测度，则对每个 $B\in\mathscr{B}$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $F\in\mathscr{C}$ 和 $G\in\mathscr{O}$ 使 $F\subset B\subset G$ 及 $\mu(G\backslash F)<\varepsilon$.

**证明** 把一切具有下述性质的 $B\in\mathscr{B}$ 记作 $\mathscr{G}$：任给 $\varepsilon>0$，存在 $F\in\mathscr{C}$ 和 $G\in\mathscr{O}$ 使 $F\subset B\subset G$ 且 $\mu(G\backslash F)<\varepsilon$. 为证 $\mathscr{B}\subset\mathscr{G}$，只需证明：1) $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$；2) $\mathscr{G}$ 是一个 $\sigma$ 域. 兹分别证如下.

1) 设 $B\in\mathscr{C}$. 令

$$G_n=\{x\in X:\rho(x,B)<1/n\},\quad n\geqslant 1,$$

则 $G_n\supset G_{n+1}$ 且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n=B$. 因此由概率测度的连续性知当 $n\to\infty$ 时，$\mu(G_n\backslash B)\to 0$. 于是对任给 $\varepsilon>0$，存在 $n_0$ 使 $\mu(G_{n_0}\backslash B)<\varepsilon$. 由于 $B$ 本身就是闭集，$G_{n_0}$ 是一个包含 $B$ 的开集，故以上事实说明了 $B\in\mathscr{G}$. 1) 由此得证.

2）易见 $\Omega\in\mathscr{G}$. 如 $B\in\mathscr{G}$，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $F\in\mathscr{C}$，$G\in\mathscr{O}$ 使 $F\subset B\subset G$ 且 $\mu(G\backslash F)<\varepsilon$. 这样，对任给 $\varepsilon>0$，就存在 $G^c\in\mathscr{C}$，$F^c\in\mathscr{O}$ 使 $G^c\subset B^c\subset F^c$ 且

$$\mu(F^c\backslash G^c)=\mu(G\backslash F)<\varepsilon.$$

于是，如 $B\in\mathscr{G}$，则 $B^c\in\mathscr{G}$. 最后，如对每 $n\geqslant 1$，$B_n\in\mathscr{G}$，那么对任给 $\varepsilon>0$，可取 $F_n\in\mathscr{C}$，$G_n\in\mathscr{O}$ 使 $F_n\subset B_n\subset G_n$ 且 $\mu(G_n\backslash F_n)<\varepsilon/2^{n+1}$；再利用概率测度的上连续性，又可确定一个 $n_0$ 使 $\mu\left(\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n\right)\backslash\left(\bigcup\limits_{n=1}^{n_0}F_n\right)\right)<\varepsilon/2$. 令 $F=\bigcup\limits_{n=1}^{n_0}F_n$，$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，则 $F\in\mathscr{C}$，$G\in\mathscr{O}$ 使 $F\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\subset G$ 且

$$\begin{aligned}\mu(G\backslash F)&=\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\backslash\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\right)+\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\backslash F\right)\\&\leqslant\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\backslash F_n)\right)+\varepsilon/2<\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明了如对每 $n\geqslant 1$，$B_n\in\mathscr{G}$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{G}$. 综上所述，$\mathscr{G}$ 是一 $\sigma$ 域，2）得证. 定理证完.

**系 1.4.2** 设如定理 1.3.1，则对任何 $B\in\mathscr{B}$，

$$\mu(B)=\inf\{\mu(G):B\subset G,G\in\mathscr{O}\}=\sup\{\mu(F):B\supset F,F\in\mathscr{C}\}.$$

**证明** 易由定理 1.3.1 得到. 略.

上述系表明，距离空间 $X$ 上的概率测度由它在全体开集或全体闭集上的值唯一确定. 也就是说，如果 $\mu_1,\mu_2$ 是 $X$ 上的概率测度，对每 $G\in\mathscr{O}$，有 $\mu_1(G)=\mu_2(G)$ 或对每 $F\in\mathscr{C}$，有 $\mu_1(F)=\mu_2(F)$，则 $\mu_1=\mu_2$. 下面我们进一步说明，距离空间上的概率测度亦由所有有界一致连续函数对于该测度的积分的值唯一确定.

**系 1.4.3** 设 $\mu_1,\mu_2$ 是距离空间 $(X,\rho)$ 上二概率测度. 如果对

$X$ 上每一有界一致连续函数 $f$ 有

$$\int f \mathrm{d}\mu_1 = \int f \mathrm{d}\mu_2,$$

则 $\mu_1 = \mu_2$.

**证明** 考虑 $\boldsymbol{R}$ 上的实值函数

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant 0, \\ 1 - t, & 0 < t \leqslant 1, \\ 0, & t > 0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

对每 $F \in \mathscr{C}$,令

$$f_n(x) = \varphi(n\rho(x, F)), \quad x \in X, n \geqslant 1. \tag{1.4.2}$$

易见对每 $n \geqslant 1$,$f_n$ 是 $X$ 上有界一致连续函数且对每 $x \in X$,$f_n(x) \to I_F(x)$. 因为 $|f_n| \leqslant 1$ 对每 $n \geqslant 1$ 成立,由控制收敛定理立得

$$\begin{aligned} \mu_1(F) &= \int I_F \mathrm{d}\mu_1 = \int \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu_1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu_2 = \int \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu_2 \\ &= \int I_F \mathrm{d}\mu_2 = \mu_2(F). \end{aligned}$$

据系 1.4.2,上式说明 $\mu_1 = \mu_2$. 证完.

我们进一步讨论完备可分距离空间上概率测度的性质. 一个距离空间 $X$ 的概率测度 $\mu$ 称为是胎紧的,如果对任给 $\varepsilon > 0$,存在 $X$ 中之紧集 $K$ 使得 $\mu(K) > 1 - \varepsilon$.

**定理 1.4.4** 完备可分距离可测空间 $(X, \mathscr{B})$ 上的概率测度 $\mu$ 是胎紧的.

**证明** $X$ 是可分的,故有可数稠集 $\{x_n, n \geqslant 1\}$. 易见对每 $i \geqslant 1$,均有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U(x_n, 1/i) = X.$$

对任给 $\varepsilon > 0$,取 $n_i$ 使

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{n_i} U(x_n, 1/i)\right) > 1 - \varepsilon/2^i, \quad i \geqslant 1.$$

令 $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{n_i} U(x_n, 1/i)$. 对任 $\delta>0, x\in A$，只要 $1/i<\delta$，就一定存在 $k$，$1\leqslant k\leqslant n_i$ 使 $\rho(x,x_k)<\delta$. 因此，$A$ 是 $X$ 中之予紧集. 由于 $X$ 完备，故 $A$ 的闭包 $A^-$ 是 $X$ 中紧集. 记 $K=A^-$，则

$$P(K^c) \leqslant P(A^c) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon,$$

即 $P(K)>1-\varepsilon$. 可见 $\mu$ 胎紧. 证完.

### 4.2 $\boldsymbol{R}^n$ 上的概率测度

先讨论 $n=1$ 的情形. 设 $\mu$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的概率测度. 对每 $x\in \boldsymbol{R}$，令

$$F(x) = \mu(-\infty, x].$$

则 $F$ 是我们在 1.2 定义过的 $\boldsymbol{R}$ 上的 d. f.. 反之，正如 1.2 所指出的，对于 $\boldsymbol{R}$ 上每一个 d. f. $F$，可以产生一个 $R$ 上的概率测度 $\mu$——$F$ 对应的 L-S 测度. 这说明 $\boldsymbol{R}$ 上的概率测度和 $\boldsymbol{R}$ 上的 d. f. 之间有一一对应的关系.

对于 $\boldsymbol{R}$ 上的每一个 d. f. $F$，我们可以定义其特征函数(缩写为 c. f. )为

$$f(t) = \int_{\boldsymbol{R}} e^{itx} \mathrm{d}F(x), \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

根据 Levy 的逆转公式. 一个 d. f. 又可以由它的特征函数唯一确定. 如果 $F$ 是一个 r. v. 的 d. f. ，那么 $F$ 的 c. f. $f$ 也称为 r. v. $\xi$ 的 c. f. ，而且根据定理 1. 2. 2，它可以表成

$$f(t) = E\exp(it\xi).$$

根据 Lebesgue 分解定理，每一个 d. f. $F$ 均有如下的表达式

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3, \tag{1.4.3}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$；$F_1, F_2$ 和 $F_3$ 都是 d. f. ；$F_1$ 是阶梯

函数，$F_2$ 对 Lebesgue 测度绝对连续，$F_3$ 连续且对 Lebesgue 测度奇异. 分解在这样的意义下是唯一的：分解系数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一；对 $i=1,2,3$，如果 $\alpha_i>0$，那么对应的 d.f. $F$ 唯一.

根据(1.1.2)式，可以把 r.v. 进行分类：如果 r.v. $\xi$ 的 d.f. $F$ 的分解式中 $\alpha_2=\alpha_3=0$，称 $\xi$ 是离散型的；如果分解式中 $\alpha_1=\alpha_3=0$，称 $\xi$ 是连续型的；如果分解式中 $\alpha_1=\alpha_2=0$，称 $\xi$ 是奇异型的. 以上三种类型的 r.v. 又统称为纯型的.

设 $n>1$，考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 上的概率测度. 类似于 $\boldsymbol{R}$ 的情形，$\boldsymbol{R}^n$ 上的概率测度与 d.f. 也有一一对应的关系. 对 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 d.f. $F$，其 c.f. 定义为

$$f(t_1,\cdots,t_n)=\int\cdots\int_{\boldsymbol{R}^n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}\mathrm{d}F(x_1,\cdots,x_n).$$

如果 $F$ 是 $n$ 维随机向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的 d.f.，那么 $F$ 的 c.f. $f$ 也叫做 $\xi$ 的 c.f.，它可以表成

$$f(t_1,\cdots,t_n)=E\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}t_k\xi_k\right).$$

特别地，如果 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 相互独立，则由系 1.1.20 知

$$E\exp\left\{\mathrm{i}t\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\}=\prod_{k=1}^{n}E\exp(\mathrm{i}t\xi_k)$$

### 4.3 Tulcea 定理的逆命题

我们在 1.6 中曾提出过 Tulcea 定理的逆命题. 这个问题的解决与基础空间的拓扑性质有关. 下面仅就基础空间是完备可分距离空间时对该问题作出正面的回答.

**定理 1.4.5** 设 $\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in\boldsymbol{N}\}$ 是一列完备可分距离可测空间，则对 $\left(\bigtimes_{k\in N}X_k,\bigtimes_{k\in N}\mathscr{B}_k\right)$ 上每一概率测度 $P$，存在 $\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in\boldsymbol{N}\}$ 上的概率转移函数族 $\{P_k,k\in\boldsymbol{N}\}$ 使(1.1.15)对每 $k\in\boldsymbol{N}$ 和每 $B_i\in\mathscr{B}_i,i=1,\cdots,k$ 成立；$\{P_k,k\in\boldsymbol{N}\}$ 在 a.s. 意义下是唯一的，即如果 $\{Q_k,k\in\boldsymbol{N}\}$ 也是 $\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in\boldsymbol{N}\}$ 上使

(1.4.4) $(P\pi^{-1}_{1,\cdots,k})(B_1\times\cdots\times B_k)$

$$=\int_{B_1}Q_1(\mathrm{d}x_1)\int_{B_2}Q_2(\mathrm{d}x_2,x_1)\cdots\int_{B_k}Q_k(\mathrm{d}x_k,x_1,\cdots,x_{k-1})$$

对每 $k\in N$ 和每 $B_i\in\mathscr{B}_i,i=1,\cdots,k$ 成立之概率转移函数族，则 $Q_1=P_1$，而且

(1.4.5) $P_k(B_k,\cdot)=Q_k(B_k,\cdot)\quad \text{a.s.}\ P\pi^{-1}_{1,\cdots,k-1}$

对每 $k\in N,k>1$ 和每 $B_k\in\mathscr{B}_k$ 成立.

**证明** 令 $P_1=P\pi_1^{-1}$. 对每 $k\in N,k>1$，以 $\pi^{(k)}_{1,\cdots,k-1}$ 和 $\pi^{(k)}_k$ 分别记 $\bigtimes_{i=1}^{k}X_i$ 到 $\bigtimes_{i=1}^{k-1}X_i$ 和 $X_k$ 的投影映射，再令 $P_k$ 为 $\left(\bigtimes_{i=1}^{k}X_i,\bigtimes_{i=1}^{k}\mathscr{B}_i,P\pi^{-1}_{1,\cdots,k}\right)$ 上随机元 $\pi^{(k)}_k$ 关于随机元 $\pi^{(k)}_{1,\cdots,k-1}$ 的给定值的正则条件分布(由于 $X_k$ 是完备可分距离空间，利用定理 1.3.11"关于随机元给定值"的翻版即知这个正则条件分布存在). 不难见 $\{P_k,k\in N\}$ 是 $\{(X_k,\mathscr{B}_k),k\in N\}$ 上的概率转移函数族. 往证它满足(1.1.15).

易见(1.1.15)对 $k=1$ 成立. 设 $k+1\in N$ 而且(1.1.15)对 $k$ 和任 $B_i\in\mathscr{B}_i,i=1,\cdots,k$ 成立. 这时用典型方法不难证明：对每非负可测函数 $f$，均有

(1.4.6) $$\int\cdots\int_{X_1\times\cdots\times X_k}f(x_1,\cdots,x_k)P\pi^{-1}_{1,\cdots,k}(\mathrm{d}x_1\times\cdots\times\mathrm{d}x_k)$$

$$=\int_{X_1}P_1(\mathrm{d}x_1)\int_{X_2}P_2(\mathrm{d}x_2,x_1)\cdots$$

$$\cdot\int_{X_k}f(x_1,\cdots,x_k)P_k(\mathrm{d}x_k,x_1,\cdots,x_{k-1}).$$

于是，根据 $P_{k+1}$ 的定义并利用(1.4.6)，对任 $B_i\in\mathscr{B}_i,i=1,\cdots,k+1$ 可得

$(P\pi^{-1}_{1,\cdots,k+1})(B_1\times\cdots\times B_{k+1})$

$$=\int\cdots\int_{\left(\pi^{(k+1)}_{1,\cdots,k}\right)^{-1}\left(\bigtimes_{i=1}^{k}B_i\right)}P_{k+1}(B_{k+1},x_1,\cdots,x_k)P\pi^{-1}_{1,\cdots,k+1}(\mathrm{d}x_1\times\cdots\times\mathrm{d}x_{k+1})$$

$$= \int \cdots \int_{B_1 \times \cdots \times B_k} P_{k+1}(B_{k+1}, x_1, \cdots, x_k) P\pi_{1,\cdots,k}^{-1}(\mathrm{d}x_1 \times \cdots \times \mathrm{d}x_k)$$

$$= \int_{B_1} P_1(\mathrm{d}x_1) \int_{B_2} P_2(\mathrm{d}x_2, x_1) \cdots \int_{B_{k+1}} P_{k+1}(\mathrm{d}x_{k+1}, x_1, \cdots, x_k),$$

即(1.1.15)仍成立. 这样我们就用数学归纳法证明了(1.1.15)对任 $k \in N$ 及 $B_i \in \mathscr{B}_i, i=1,\cdots,k$ 成立.

如果(1.1.15)对任 $k \in N$ 及 $B_i \in \mathscr{B}_i, i=1,\cdots,k$ 成立, 那么取 $k=1$, 就得 $P_1 = P\pi_1^{-1}$. 此外, 对 $k \in N, k>1$, 任取 $A_{k-1} \in \bigtimes_{i=1}^{k-1} \mathscr{B}_i$ 和 $B_k \in \mathscr{B}_k$, 利用(1.4.6)可得

$$(P\pi_{1,\cdots,k}^{-1})(A_{k-1} \times B_k)$$

$$= \int_{X_1} P_1(\mathrm{d}x_1) \int_{X_2} P_2(\mathrm{d}x_2, x_1) \cdots$$

$$\cdot \int_{X_k} I_{A_{k-1} \times B_k}(x_1, \cdots, x_k) P_k(\mathrm{d}x_k, x_1, \cdots, x_{k-1})$$

$$= \int \cdots \int_{A_{k-1}} P_k(B_k, x_1, \cdots, x_{k-1}) P\pi_{1,\cdots,k-1}^{-1}(\mathrm{d}x_1 \times \cdots \times \mathrm{d}x_{k-1})$$

$$= \int \cdots \int_{(\pi_{1,\cdots,k-1}^{(k)})^{-1} A_{k-1}} P_k(B_k, x_1, \cdots, x_{k-1}) P\pi_{1,\cdots,k}^{-1}(\mathrm{d}x_1 \times \cdots \times \mathrm{d}x_k).$$

这说明了 $P_k(\cdot,\cdot)$ 是概率空间 $\left(\bigtimes_{i=1}^{k} X_i, \bigtimes_{i=1}^{k} \mathscr{B}_i, P\pi_{1,\cdots,k}^{-1}\right)$ 上随机元 $\pi_k^{(k)}$ 关于随机元 $\pi_{1,\cdots,k-1}^{(k)}$ 给定值的正则条件分布. 同理, 由(1.4.4)可以推知 $Q_1 = P\pi_1^{-1}$ 而且当 $k \in N, k>1$ 时, $Q_k(\cdot,\cdot)$ 是 $\left(\bigtimes_{i=1}^{k} X_i, \bigtimes_{i=1}^{k} \mathscr{B}_i, P\pi_{1,\cdots,k}^{-1}\right)$ 上 $\pi_k^{(k)}$ 关于 $\pi_{1,\cdots,k-1}^{(k)}$ 的给定值的正则条件分布. 因此, $P_1 = Q_1$ 且(1.4.5)成立. 证完.

## 4.4 Kolmogorov 相容性定理

我们将讨论无穷维乘积空间上的概率测度. 设 $T$ 是一个无穷集, $\left(\bigtimes_{t\in T} X_t, \bigtimes_{t\in T} \mathscr{B}_t\right)$ 是一个乘积空间, $P$ 是 $\bigtimes_{t\in T} \mathscr{B}_t$ 上的概率测度. 对每 $k\geqslant 1$, $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$, 令

$$P_{t_1,\cdots,t_k} = P\pi^{-1}_{t_1,\cdots,t_k},$$

则 $\{P_{t_1,\cdots,t_k}: \{t_1,\cdots,t_k\}\subset T, k\geqslant 1\}$ 是一族有限维的概率测度族. 我们的问题是: 在什么样的条件下, 一族有限维的概率测度族能唯一确定无穷维乘积空间上的概率测度.

先考虑 $T=\{1,2,\cdots\}$ 的情况. 设 $\{(X_k,\mathscr{B}_k), k\geqslant 1\}$ 是一族可测空间. 如果对每 $k\geqslant 1$, $P_{1,\cdots,k}$ 是 $\left(\bigtimes_{i=1}^{k} X_i, \bigtimes_{i=1}^{k} \mathscr{B}_i\right)$ 上的概率测度, 而且

$$P_{1,\cdots,k+1}(B_1\times\cdots\times B_k\times X_{k+1}) = P_{1,\cdots,k}(B_1\times\cdots\times B_k) \tag{1.4.7}$$

对任 $B_i\in\mathscr{B}_i$, $i=1,\cdots,k$ 成立, 则称 $\{P_{1,\cdots,k}, k\geqslant 1\}$ 为乘积空间 $\left(\bigtimes_{k=1}^{\infty} X_k, \bigtimes_{k=1}^{\infty} \mathscr{B}_k\right)$ 上的相容的有限维概率测度族, 简称为相容族.

**定理 1.4.6** 设 $\{(X_k,\mathscr{B}_k), k\geqslant 1\}$ 是一列完备可分距离可测空间. 对 $\left(\bigtimes_{k=1}^{\infty} X_k, \bigtimes_{k=1}^{\infty} \mathscr{B}_k\right)$ 上每一相容族 $\{P_{1,\cdots,k}, k\geqslant 1\}$ 存在唯一的概率测度 $P$ 使

$$P\pi^{-1}_{1,\cdots,k} = P_{1,\cdots,k} \tag{1.4.8}$$

对每 $k\geqslant 1$ 成立.

**证明** 对每 $k>1$, 以 $\pi_k^{(k)}$ 和 $\pi_{1,\cdots,k-1}^{(k)}$ 分别记 $\bigtimes_{i=1}^{k} X_i$ 到 $X_k$ 和

$\bigtimes_{i=1}^{k-1} X_i$ 的投影映射，再令 $P_k(\cdot,\cdot)$ 为概率空间 $\left(\bigtimes_{i=1}^{k} X_i,\ \bigtimes_{i=1}^{k} \mathscr{B}_i, P_{1,\cdots,k}\right)$ 上随机元 $\pi_k^{(k)}$ 关于随机元 $\pi_{1,\cdots,k-1}^{(k)}$ 的给定值的正则条件分布. 利用(1.4.7)式，经由数学归纳法不难证明：对每 $k\geqslant 1$ 和任 $B_i\in\mathscr{B}_i, i=1,\cdots,k$，有

$$
(1.4.9)\qquad P_{1,\cdots,k}\left(\bigtimes_{i=1}^{k} B_i\right)=\int_{B_1}P_1(\mathrm{d}x_1)\int_{B_2}P_2(\mathrm{d}x_2,x_1)\cdots
$$

$$
\cdot\int_{B_k}P_k(\mathrm{d}x_k,x_1,\cdots,x_{k-1}).
$$

由于 $\{P_k,k\geqslant 1\}$ 是 $\{(X_k;\mathscr{B}_k),k\geqslant 1\}$ 上的概率转移函数族，故引用 Tulcea 定理又知在 $\left(\bigtimes_{k=1}^{\infty} X_k,\ \bigtimes_{k=1}^{\infty}\mathscr{B}_k\right)$ 上有唯一的概率测度 $P$ 使(1.1.15)对每 $k\geqslant 1$ 和每 $B_i\in\mathscr{B}_i, i=1,\cdots,k$ 成立. 把(1.1.15)和(1.4.9)对照，推知对每 $k\geqslant 1$，

$$
(P\pi_{1,\cdots,k}^{-1})\left(\bigtimes_{i=1}^{k} B_i\right)=P_{1,\cdots,k}\left(\bigtimes_{i=1}^{k} B_i\right)
$$

对任 $B_i\in\mathscr{B}_i, i=1,\cdots,k$ 成立；再用典型方法即知，作为 $\left(\bigtimes_{i=1}^{k} X_i,\ \bigtimes_{i=1}^{k}\mathscr{B}_i\right)$ 上的概率测度，(1.4.8)成立. 证完.

再考虑 $T$ 是任意无穷集的情况.

**定义 1.4.1** 设 $T$ 是无穷集，$\{(X_t,\mathscr{B}_t),t\in T\}$ 是一族可测空间. 又设对每 $k\geqslant 1$，每 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$，$P_{t_1,\cdots,t_k}$ 是 $\left(\bigtimes_{i=1}^{k} X_{t_i},\ \bigtimes_{i=1}^{k}\mathscr{B}_{t_i}\right)$ 上的概率测度. 称

$$
\{P_{t_1,\cdots,t_k}:\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T;k\geqslant 1\}
$$

为相容有限维概率测度族，简称相容族，如果

(1) 对每 $k\geqslant 1$，每 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$，每 $B_{t_i}\in\mathscr{B}_{t_i}, i=1,\cdots,k$ 及

$t_1,\cdots,t_k$ 的每一个排列 $t_1',\cdots,t_k'$，有

$$P_{t_1',\cdots,t_k'}(B_{t_1'}\times\cdots\times B_{t_k'})=P_{t_1,\cdots,t_k}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_k});$$

(2) 对每 $k\geqslant1$，每 $\{t_1,\cdots,t_{k+1}\}\subset T$ 及每 $B_{t_i}\in\mathscr{B}_{t_i},i=1,\cdots,k$ 均有

$$P_{t_1,\cdots,t_{k+1}}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_k}\times X_{t_{k+1}})=P_{t_1,\cdots,t_k}(B_{t_1}\times\cdots\times B_{t_k}).$$

**定理 1.4.7** 设 $T$ 是无穷集，$\{(X_t,\mathscr{B}_t),t\in T\}$ 是完备可分距离可测空间族. 对于 $\left(\bigtimes_{t\in T}X_t,\bigtimes_{t\in T}\mathscr{B}_t\right)$ 上的任一相容族 $\{P_{t_1,\cdots,t_k}:\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T,k\geqslant1\}$，存在唯一的概率测度 $P$ 使对每 $k\geqslant1$，每 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$，均有

$$P\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}=P_{t_1,\cdots,t_k}. \tag{1.4.10}$$

**证明** 对 $T$ 的非空子集 $S$，以 $\pi_S$ 记 $\bigtimes_{t\in T}X_t$ 到 $\bigtimes_{t\in S}X_t$ 的投影映射. 如 $S_1,S_2$ 都是 $T$ 的非空子集且 $S_1\subset S_2$，则以 $\pi_{S_1}^{S_2}$ 记 $\bigtimes_{t\in S_2}X_t$ 到 $\bigtimes_{t\in S_1}X_t$ 的投影映射. 易见，对任 $B\in\bigtimes_{t\in S_1}X_t$，有

$$\pi_{S_1}^{-1}B=\pi_{S_2}^{-1}(\pi_{S_1}^{S_2})^{-1}B. \tag{1.4.11}$$

我们将分四步来证明定理.

(1) 对 $T$ 的任一可数子集 $S$，在 $\bigtimes_{t\in S}\mathscr{B}_t$ 上有唯一的概率测度 $P_S$ 使

$$P_S(\pi_{t_1,\cdots,t_k}^S)^{-1}=P_{t_1,\cdots,t_k} \tag{1.4.12}$$

对每 $k\geqslant1$，每 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset S$ 成立.

证：记 $S=\{s_1,s_2,\cdots\}$. 易见 $\{P_{s_1,\cdots,s_n},n\geqslant1\}$ 是定理 1.4.6 所要求的，可数维乘积空间 $\left(\bigtimes_{t\in S}X_t,\bigtimes_{t\in S}\mathscr{B}_t\right)$ 上的相容族. 因此由定理 1.4.6知 $\left(\bigtimes_{t\in S}X_t,\bigtimes_{t\in S}\mathscr{B}_t\right)$ 上有唯一的概率测度 $P_S$ 使

$$P_S\left(\pi_{s_1,\cdots,s_n}^S\right)^{-1}=P_{s_1,\cdots,s_n} \tag{1.4.13}$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立. 任给 $k\geqslant 1$, $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset S$ 及 $B_{t_i}\in\mathscr{B}_{t_i}$, $i=1,\cdots,k$, 取充分大的 $n$ 使 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset\{s_1,\cdots,s_n\}$ 并定义 $\{A_{s_j},j=1,\cdots,n\}$ 为: 如存在 $i$, $1\leqslant i\leqslant k$ 使 $s_j=t_i$, 则 $A_{s_j}=B_{t_i}$; 如 $s_j\notin\{t_1,\cdots,t_k\}$, 则 $A_{s_j}=X_{s_j}$. 由(1.4.11), (1.4.13)和相容性条件——定义 1.4.1 的(1)和(2)立得

$$P_S(\pi^S_{t_1,\cdots,t_k})^{-1}\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_{t_i}\Big)=P_S(\pi^S_{s_1,\cdots,s_n})^{-1}\Big(\mathop{\times}_{j=1}^{n}A_{s_j}\Big)$$

$$=P_{s_1,\cdots,s_n}\Big(\mathop{\times}_{j=1}^{n}A_{s_j}\Big)=P_{t_1,\cdots,t_k}\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_{t_i}\Big).$$

据此, 经由典型方法便可证得 $P_S$ 满足(1.4.12).

(2) 设 $S_1,S_2$ 是 $T$ 的可数子集, $B_1\in\mathop{\times}_{t\in S_1}\mathscr{B}_t$, $B_2\in\mathop{\times}_{t\in S_2}\mathscr{B}_t$. 如果 $\pi_{S_1}^{-1}B_1=\pi_{S_2}^{-1}B_2$, 则

$$P_{S_1}(B_1)=P_{S_2}(B_2). \tag{1.4.14}$$

证: 令 $S=S_1\cup S_2$. 对每 $k\geqslant 1$, $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset S_1$ 以及 $B_{t_1,\cdots,t_k}\in\mathop{\times}_{i=1}^{k}\mathscr{B}_{t_i}$, 由(1.4.11)和(1.4.12)知

$$P_{S_1}((\pi^{S_1}_{t_1,\cdots,t_k})^{-1}B_{t_1,\cdots,t_k})=P_{S_1}(\pi^{S_1}_{t_1,\cdots,t_k})^{-1}(B_{t_1,\cdots,t_k})$$

$$=P_{t_1,\cdots,t_k}(B_{t_1,\cdots,t_k})=P_S(\pi^S_{t_1,\cdots,t_k})^{-1}(B_{t_1,\cdots,t_k})$$

$$=P_S(\pi^S_{S_1})^{-1}((\pi^{S_1}_{t_1,\cdots,t_k})^{-1}B_{t_1,\cdots,t_k}).$$

据此, 经由典型方法便得

$$P_{S_1}=P_S(\pi^S_{S_1})^{-1}. \tag{1.4.15}$$

同理可证

$$P_{S_2}=P_S(\pi^S_{S_2})^{-1}.$$

利用以上两式, 并注意 $\pi_{S_1}^{-1}B_1=\pi_{S_2}^{-1}B_2$ 蕴含 $(\pi^S_{S_1})^{-1}B_1=(\pi^S_{S_2})^{-1}B_2$, 我们有

$$P_{S_1}(B_1) = P_S(\pi^S_{S_1})^{-1}(B_1) = P_S((\pi^S_{S_1})^{-1}B_1) = P_S((\pi^S_{S_2})^{-1}B_2)$$
$$= P_S(\pi^S_{S_2})^{-1}(B_2) = P_{S_2}(B_2),$$

(1.4.14)得证.

(3) 据(1.1.14),对任 $B\in \underset{t\in T}{\times}\mathscr{B}_t$,存在 $T$ 的可数子集 $S$ 和 $A \in \underset{t\in S}{\times}\mathscr{B}_t$ 使 $B=\pi_S^{-1}A$. 令

$$P(B) = P_S(A),$$

则 $P(B)$是一意地确定的. 事实上,如另有 $T$ 的可数子集 $S'$和 $A' \in \underset{t\in S'}{\times}\mathscr{B}_t$使 $B=\pi_{S'}^{-1}A'$,那么由(2)可知 $P_{S'}(A')=P_S(A)$. 因此,以上述方式定义的 $P(B)$是唯一的. 往证 $P=\{P(B),B\in \underset{t\in T}{\times}\mathscr{B}_t\}$是概率测度.

不难见 $P(\varnothing)=0$,$P\left(\underset{t\in T}{\times}X_t\right)=1$,而且对任 $B\in \underset{t\in T}{\times}\mathscr{B}_t$ 总有 $0\leqslant P(B)\leqslant 1$. 因此只需再证 $P$ 具有可数可加性. 设$\{B_n,n\geqslant 1\}$是 $\underset{t\in T}{\times}\mathscr{B}_t$ 中两两不交的集合序列. 对每 $n\geqslant 1$,取 $T$ 的可数子集 $S_n$ 和 $A_n\in \underset{t\in S_n}{\times}\mathscr{B}_t$ 使 $B_n=\pi_{S_n}^{-1}A_n$. 记 $S_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$. 据(1.4.11),可表

$$B_n = \pi_{S_0}^{-1}(\pi^{S_0}_{S_n})^{-1}A_n, \tag{1.4.16}$$

而且由$\{B_n,n\geqslant 1\}$两两不交推知$\{(\pi^{S_0}_{S_n})^{-1}A_n,n\geqslant 1\}$亦两两不交. 于是由定义的一意性,(1.4.15)及(1.4.16)得

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right) = P_{S_0}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\pi^{S_0}_{S_n})^{-1}A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}P_{S_0}((\pi^{S_0}_{S_n})^{-1}A_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}P_{S_n}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}P(B_n).$$

这证明了 $P$ 有可数可加性,因而是概率测度.

对每 $k\geqslant 1$，每 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$ 和每 $B_{t_1,\cdots,t_k}\in\bigtimes_{i=1}^{k}\mathscr{B}_{t_i}$，取一个 $T$ 的可数子集 $S$ 使 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset S$，由(1.4.11)，$P$ 的定义及(1.4.12)便有

$$\begin{aligned}P\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}(B_{t_1,\cdots,t_k}) &= P(\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}B_{t_1,\cdots,t_k})\\ &= P(\pi_S^{-1}(\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{S})^{-1}B_{t_1,\cdots,t_k})\\ &= P_S((\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{S})^{-1}B_{t_1,\cdots,t_k})\\ &= P_S(\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{S})^{-1}(B_{t_1,\cdots,t_k}) = P_{t_1,\cdots,t_k}(B_{t_1,\cdots,t_k}),\end{aligned}$$

即(1.4.10)成立. 这说明概率测度 $P$ 符合定理要求.

(4) 设 $P$ 和 $P'$ 均是符合定理要求的概率测度，则对每 $k\geqslant 1$，每 $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$ 和每 $B_{t_1,\cdots,t_k}\in\bigtimes_{i=1}^{k}\mathscr{B}_{t_i}$ 有

$$P(\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}B_{t_1,\cdots,t_k}) = P_{t_1,\cdots,t_k}(B_{t_1,\cdots,t_k}) = P'(\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}B_{t_1,\cdots,t_k}).$$

这说明 $P$ 和 $P'$ 在 $\bigtimes_{t\in T}\mathscr{B}_t$ 的一切有限维可测柱集上的值相等. 根据测度扩张的唯一性，我们知必有 $P=P'$. 这证明了符合定理条件的概率测度是唯一的. 定理证完.

无疑，定理 1.4.7 包括 $T$ 是可数集的情况. 不难看出，在这种情况下，定理 1.4.7 和定理 1.4.6 所使用的相容性条件实质上是等价的. 只不过在定理 1.4.6 中充分利用了可数集总是可以排序的这一特点，把相容性条件形式上写得简单些罢了.

设 $T$ 是一个无穷集. 我们称 d. f. 族

$$\{F_{t_1,\cdots,t_k}:\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T;k\geqslant 1\} \tag{1.4.17}$$

是 $(\boldsymbol{R}^T,\mathscr{R}^T)$ 上相容的有限维 d. f. 族，如果

(1) 任给 $k\geqslant 1$，$\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$ 及 $x_{t_i}\in\boldsymbol{R}$，$i=1,\cdots,k$，对 $t_1,\cdots,t_k$ 的每一排列 $t_1',\cdots,t_k'$，有

$$F_{t_1,\cdots,t_k}(x_{t_1},\cdots,x_{t_k}) = F_{t_1',\cdots,t_k'}(x_{t_1'},\cdots,x_{t_k'});$$

2) 对每 $k\geqslant 1$，$\{t_1,\cdots,t_{k-1}\}\subset T$ 及 $x_i\in\mathbf{R}$，$i=1,\cdots,k$，有

$$\lim_{x_{k+1}\to\infty} F_{t_1,\cdots,t_{k+1}}(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}) = F_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k).$$

易见随机过程的有限维 d. f. 族是相容的. 反之，给定一个相容的有限维 d. f. 族(1. 4. 17). 对每 $k\geqslant 1$ 和每$\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$，以 $P_{t_1,\cdots,t_k}$ 记 $F_{t_1,\cdots,t_k}$对应的 L-S 测度，则得到一个$(\mathbf{R}^T,\mathscr{R}^T)$上的相容有限维概率测度族$\{P_{t_1,\cdots,t_k}:\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T,k\geqslant 1\}$. 由定理 1. 4. 7，在$(\mathbf{R}^T,\mathscr{R}^T)$上就有唯一的概率测度 $P$ 使(1. 4. 10)或等价地

$$P\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}(-\infty,x_i]\Big) = F_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k), \quad x_1,\cdots,x_k\in\mathbf{R}$$

对每 $k\geqslant 1$ 和每$\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$ 成立. 这时候，$(\mathbf{R}^T,\mathscr{R}^T,P)$上的坐标过程$\{\pi_t,t\in T\}$将以(1. 4. 17)为有限维 d. f. 族.

## 习　题　1. 4

1. 证明系 1. 4. 2. .

2. 设 $P$ 是可分距离可测空间$(X,\mathscr{B})$上的概率测度. 证明存在唯一的闭集 $C_0$ 使

(1) $P(C_0)=1$；

(2) 对任何闭集 $C$，如果 $P(C)=1$，则 $C\supset C_0$.

3. 设 $\xi$ 和 $\eta$ 是相互独立的 r. v. . 证明如 $\xi$ 和 $\eta$ 之一是连续型的，则 $\xi+\eta$ 亦是连续型的.

4. 证明每一个二维 d. f. $F$ 可作如下的分解：

$$F = \alpha_0F_0 + \alpha_1F_1 + \alpha_2F_2 + \alpha_3F_3,$$

其中 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\geqslant 0$，$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$；d. f. $F_0$ 对应的概率测度集中在 $\mathbf{R}^2$ 内至多可列个点上；d. f. $F_1$ 对应的概率测度集中在 $\mathbf{R}^2$ 中至多可列条平行于坐标轴的直线上而且 $\mathbf{R}^2$ 中任一点的概率测度均为 0；d. f. $F_2$ 对应的概率测度关于二维 Lebesgue 测度绝对连续；d. f. $F_3$ 对应的概率测度集中在一个二维 Lebesgue 0 测集上，但 $\mathbf{R}^2$ 中任一平行于坐标轴的直线上概率测度为 0.

5. 设 r.v. $\xi$ 的 c.f. 是 $f$,则对任 $p>0$,

$$E|\xi|^p = C_p\int_R \frac{1-\mathrm{Re}f(t)}{|t|^{p+1}}\mathrm{d}t,$$

其中 $C_p=\Gamma(p+1)\sin(p\pi/2)/\pi$.

6. 设 r.v. $\xi$ 的 c.f. $f$ 是实的. 证明:对任 $a>0$,r.v. $\xi_a=\xi I_{\{|\xi|\leqslant a\}}$的 c.f. $f_a$ 也是实的而且 $f_a\geqslant f$.

7. 设 $T$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的无穷子集,$(X,\mathscr{B})$是一完备可分距离可测空间. 又设函数族

$$\{P_{s,t}(\cdot,\ \cdot):s,t\in T,s<t\}$$

满足条件:

(1) 对每 $s,t\in T,s<t,P_{s,t}(\cdot,\cdot)$是$(X,\mathscr{B})$到$(X,\mathscr{B})$的概率转移函数;

(2) 对每 $r,s,t\in T,r<s<t$ 和每 $x\in X,A\in\mathscr{B}$,有

$$P_{r,t}(A,x)=\int_X P_{r,s}(\mathrm{d}y,x)P_{s,t}(A,y).$$

证明:存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$和$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(X^T,\mathscr{B}^T)$的随机元 $\xi=\{\xi_t,t\in T\}$使

$$P(\xi_t\in A|\xi_s=x)=P_{s,t}(A,x)$$

对一切 $s,t\in T,s<t$ 及一切 $x\in X,A\in\mathscr{B}$ 成立.

8. 设 $T$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个无穷子集,有限维 d.f. 族

$$\{F_{t_1,\cdots,t_k}:\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T,t_1<\cdots<t_k;k\geqslant 1\}$$

满足条件:对任 $k\geqslant 1,\{t_1,\cdots,t_{k+1}\}\subset T,t_1<\cdots<t_{k+1}$和 $x_1,\cdots,x_k\in\boldsymbol{R}$,均有

$$F_{t_1,\cdots,t_k,t_{k+1}}(x_1,\cdots,x_k,\infty)=F_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k).$$

证明:存在一个概率空间和它上面的随机过程$\{\xi_t,t\in T\}$使

$$P(\xi_{t_i}\leqslant x_i,i=1,\cdots,k)=F_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k)$$

对每 $k\geqslant 1,\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T,t_1<\cdots<t_k$ 和 $x_1,\cdots,x_k\in\boldsymbol{R}$ 成立.

9. 设 $T$ 是任一无穷集,$\mu(\cdot)$是 $T$ 上定义的实值函数,又 $T$

$\times T$ 上的实函数 $\rho(\cdot,\cdot)$满足

(1) 对每 $s,t\in T$,

$$\rho(s,t)=\rho(t,s);$$

(2) 对每 $k\geqslant 1$, $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$ 和 $x_1,\cdots,x_k\in \boldsymbol{R}$,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\rho(t_i,t_j)x_ix_j\geqslant 0.$$

证明:存在一个概率空间和它上面定义的随机过程$\{\xi_t,t\in T\}$使对每 $k\geqslant 1$, $\{t_1,\cdots,t_k\}\subset T$, $\{\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_k}\}$是 $k$ 维正态分布随机向量;对每 $t\in T$,

$$E\xi_t=\mu(t);$$

对每 $s,t\in T$,

$$\mathrm{cov}(\xi_s,\xi_t)=\rho(s,t).$$

10. 随机过程$\{W_t,0\leqslant t<\infty\}$称为是独立增量的,如对每 $k>1$,每 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\infty$, $W_{t_1}-W_{t_0},\cdots,W_{t_k}-W_{t_{k-1}}$相互独立. 证明:如果 d. f. 族$\{F_{t_1,t_2},0\leqslant t_1<t_2<\infty\}$满足条件:对任 $0\leqslant t_1<t_2<t_3<\infty$,

$$F_{t_1,t_3}=F_{t_1,t_2}*F_{t_2,t_3},$$

则存在概率空间和它上面定义的独立增量过程$\{W_t,0\leqslant t<\infty\}$使对每 $0\leqslant t_1<t_2<\infty$均有

$$W_{t_2}-W_{t_1}\sim F_{t_1,t_2}$$

(说明:d. f. $G$ 和 d. f. $H$ 的卷积定义为

$$(G*H)(x)=\int_{\boldsymbol{R}}G(x-y)\mathrm{d}H(y),\quad x\in\boldsymbol{R};$$

如果 r. v. $\xi$ 和 $\eta$ 独立, $\xi\sim G$, $\eta\sim H$,则

$$\xi+\eta\sim G*H).$$

# 第二章 离散鞅论

鞅论是现代概率论的一个重要内容,也是随机过程和数理统计的一个有力工具.鞅的概念的产生或许和概率论早期研究的对象——赌博问题有关.但是,鞅论本身在近二三十年来的迅猛发展却有着理论和实际两方面的需要.一方面,鞅是独立随机变量部分和的自然推广,人们致力于把概率论中关于独立和的古典结果推广到鞅上去.另一方面,在随机过程和数理统计的研究中,人们遇到了形形色色的具体的鞅,形成了鞅论研究的强大推动力.据查,鞅这个词出现在近代概率论文献中是 1939 年,而 1953 年 Doob 在他的《随机过程》一书中关于下鞅基本收敛定理的证明则普遍认为是鞅论发展的一个重要里程碑.

本章主要讨论离散鞅的一些基本事实.在第四、五两章我们还将讨论离散鞅的一些极限定理,这些内容不少是六十年代以来发展起来的.关于连续参数鞅,我们只是提到了一些今后要用到的结论.应该指出,连续鞅决不是离散的简单的平行的推广,它的内容和方法与离散鞅有很大的差别.对这方面有兴趣的读者,可以查阅有关文献.

## 第一节 基本概念

### 1.1 定义及简单性质

鞅的概念有很强的直观背景.比如说,某人连续参加若干局的赌博,赌完 $n$ 局后的总赢利记作 $S_n$.自然,$S_n$ 应看作一个 r.v..如

果此人运气不坏，那么人们以他前 $n$ 局的"战绩"去推测他第 $n+1$ 局的胜负就会认为他不大会输，用一个式子来表示就是 $E(S_{n+1}|S_1,\cdots,S_n)\geqslant S_n$ a. s.. 如果此人运气不佳或运气平平，就可以用 $E(S_{n+1}|S_1,\cdots,S_n)\leqslant S_n$ a. s. 或 $E(S_{n+1}|S_1,\cdots,S_n)=S_n$ 分别去描述他赌博的情况. 以上三种情况，我们说 $\{S_n,n\geqslant 1\}$ 分别形成了下鞅、上鞅和鞅.

为了给下鞅、上鞅和鞅正式下定义，先要引进一些术语. 设 $T$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个子集，我们说概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一族子 $\sigma$ 域 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是非降的，是指对任 $t_1,t_2\in T$，$t_1\leqslant t_2$ 均有 $\mathscr{F}_{t_1}\subset\mathscr{F}_{t_2}$. 例如，对于一列 r. v. $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$，令 $\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_i,1\leqslant i\leqslant n),n\geqslant 1$，则 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是一列非降 $\sigma$ 域. 给定一个可测函数族 $\{S_t,t\in T\}$ 和一个非降子 $\sigma$ 域 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$. 如果对每 $t\in T$，$S_t$ 关于 $\mathscr{F}_t$ 可测，我们就说 $\{S_t,t\in T\}$ 适于 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$，并把它们写成 $\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 而称之为适可测函数族. 例如，一列 r. v. $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 当取 $\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_i,1\leqslant i\leqslant n),n\geqslant 1$ 后，就自然而然地得到一个适可测函数列 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$.

**定义 2.1.1** 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的适可测函数族 $\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 称为是（下鞅，上鞅）鞅，如果对每 $t_1,t_2\in T$，$t_1\leqslant t_2$，$E(S_{t_2}|\mathscr{F}_{t_1})$ 有定义并且

$$E(S_{t_2}|\mathscr{F}_{t_1})(\geqslant,\leqslant)=S_{t_1}\quad \text{a.s.}. \tag{2.1.1}$$

当（下鞅，上鞅）鞅的参数集 $T\subset\{1,2,\cdots\}$ 时，称之为离散（下鞅，上鞅）鞅. 当对每 $t\in T$，$E|S_t|^p<\infty\ (p>0)$ 时，（下鞅，上鞅）鞅 $\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 称为 $L_p$（下鞅，上鞅）鞅.

下面是用命题形式给出的下鞅、上鞅和鞅的一些性质.

**命题 2.1.1** $\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是下鞅的充要条件是 $\{-S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是上鞅；$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是鞅的充要条件是它既是下鞅又是上鞅.

从上述命题可见，每一个关于下鞅的结论都可以翻译成关于上鞅的结论. 这样，今后我们只要讨论下鞅和鞅，翻译工作则请读者自己去做.

**命题 2.1.2** 如$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$是下鞅或鞅并且对每$t\in T$，$ES_t$有意义，则$ES_t$作为$t$的函数分别是非降函数或常数函数.

**命题 2.1.3** 如$\{S_t^{(1)},\mathscr{F}_t,t\in T\}$和$\{S_t^{(2)},\mathscr{F}_t,t\in T\}$都是下鞅或都是鞅，则对任何非负实数或实数$a,b$，只要对每$t\in T$，$aES_t^{(1)}+bES_t^{(2)}$有意义，则$\{aS_t^{(1)}+bS_t^{(2)},\mathscr{F}_t,t\in T\}$分别是下鞅或鞅.

**命题 2.1.4** 如$\{S_t^{(1)},\mathscr{F}_t,t\in T\}$和$\{S_t^{(2)},\mathscr{F}_t,t\in T\}$都是下鞅而且对每$t\in T$，$E(S_t^{(1)}\vee S_t^{(2)})$有意义，则$\{S_t^{(1)}\vee S_t^{(2)},\mathscr{F}_t,t\in T\}$是下鞅.

**证明** 对任$t_1,t_2\in T$，$t_1\leqslant t_2$，有

$$E(S_{t_2}^{(1)}\vee S_{t_2}^{(2)}\mid\mathscr{F}_{t_1})\geqslant E(S_{t_2}^{(i)}\mid\mathscr{F}_{t_1})\geqslant S_{t_1}^{(i)}\quad \text{a.s.},\quad i=1,2.$$

由此可见$E(S_{t_2}^{(1)}\vee S_{t_2}^{(2)}\mid\mathscr{F}_{t_1})\geqslant S_{t_1}^{(1)}\vee S_{t_2}^{(2)}$ a.s.. 证完.

命题 2.1.3 和命题 2.1.4 说明下鞅具有某种再生性质. 在这方面，最为重要的结论是下列定理.

**定理 2.1.5** 设$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$是鞅或下鞅，对应地$g$分别是$\boldsymbol{R}$上连续凸函数或非降的连续凸函数. 如果对每$t_1,t_2\in T$，$t_1\leqslant t_2$，$E[g(S_{t_2})\mid\mathscr{F}_{t_1}]$有定义，则$\{g(S_t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$是一个下鞅.

**证明** 在鞅的情况下，直接用条件 Jensen 不等式(1.3.15)便知

$$E[g(S_{t_2})\mid\mathscr{F}_{t_1}]\geqslant g(E(S_{t_2}\mid\mathscr{F}_{t_1}))=g(S_{t_1})\quad \text{a.s.}$$

对任何$t_1,t_2\in T$，$t_1\leqslant t_2$成立. 在下鞅的情况下，利用(1.3.15)及$g$的非降性，又有

$$E[g(S_{t_2})\mid\mathscr{F}_{t_1}]\geqslant g(E(S_{t_2}\mid\mathscr{F}_{t_1}))\geqslant g(S_{t_1})\quad \text{a.s.}$$

对任何$t_1,t_2\in T$，$t_1\leqslant t_2$成立. 所以在两种情况下$\{g(S_t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$都是下鞅. 证完.

利用定理 2.1.5,可以通过鞅或下鞅再生出许多下鞅来.下面是一个特例.

**系 2.1.6** 如$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$是鞅,则对每 $p\geqslant 1$,$\{|S_t|^p,\mathscr{F}_t,t\in T\}$是下鞅.如$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$是下鞅,则$\{S_t^+,\mathscr{F}_t,t\in T\}$还是下鞅.

**证明** 因为当 $p\geqslant 1$ 时,$g(x)=|x|^p$ 是连续凸函数,又因为 $g(x)=x^+$是非降连续凸函数,故由定理 2.1.5 立得本系.

### 1.2 鞅序列和鞅差序列

所谓鞅序列就是当 $T=\{1,2,\cdots\}$时的鞅.类似地当 $T=\{1,2,\cdots\}$时的下鞅也叫下鞅序列.对于鞅序列和下鞅序列,(2.1.1)有一个简单的等价条件,这就是下列命题.

**命题 2.1.7** 适可测函数列$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一(下鞅)鞅当且仅当对每 $n\geqslant 1$,$E(S_{n+r}|\mathscr{F}_n)$有定义并且下式成立:

(2.1.2) $$E(S_{n+1}|\mathscr{F}_n)(\geqslant) = S_n \quad \text{a.s.}.$$

我们再引进鞅差序列的概念.

**定义 2.1.2** 适可测函数列$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$称为是鞅差序列,如果对每 $n\geqslant 1$,$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n)$有定义并且下式成立:

(2.1.3) $$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

应该指出,鞅差的概念是一个相当一般的概念.事实上,给定一个 $L_1$ 中的序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$,令 $\mathscr{F}_0=:\{\varnothing,\Omega\}$,$\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_i,1\leqslant i\leqslant n)$,则容易验证$\{\xi_n-E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1}),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$形成一个鞅差序列.此外,鞅差序列和鞅序列有着紧密的内在联系.事实上,给定一个 $L_1$ 鞅$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$.对每 $n\geqslant 1$,令

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega) - S_{n-1}(\omega), & S_n(\omega),S_{n-1}(\omega)\in \mathbf{R}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(约定 $S_0=0$),则$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$形成一个 $L_1$ 中的鞅差序列.反之,给定一个 $L_1$ 鞅差序列,那么对每 $n\geqslant 1$,令

$$S_n(\omega)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\omega), & \xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega)\in \boldsymbol{R},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$形成一个 $L_1$ 鞅. 这个重要的联系使得鞅成为研究一般 r. v. 列部分和收敛问题的有力工具.

下面,我们给出 $L_2$ 鞅差序列的一个重要性质.

**命题 2.1.8** $L_2$ 中的鞅差序列$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是正交列,也就是说,对每 $n\geqslant 1$,我们有

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big)^2=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2. \tag{2.1.4}$$

**证明** 利用条件期望的性质和(2.1.3)可知,对每 $1\leqslant i<j$,有

$$E\xi_i\xi_j=E[E(\xi_i\xi_j|\mathscr{F}_i)]=E[\xi_iE(\xi_j|\mathscr{F}_i)]=0 \quad \text{a.s.}.$$

由此我们得

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big)^2=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}E\xi_i\xi_j=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立. 证完.

### 1.3 例

我们将提供随机过程和数理统计等方面鞅的一些例子,从中可以悟出一点鞅的应用的广泛性.

(1) 设 $S$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数,$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$是一族非降 $\sigma$ 域,对每 $t\in T$,$E(S|\mathscr{F}_t)$有定义,则$\{E(S|\mathscr{F}_t),\mathscr{F}_t,t\in T\}$是一个鞅.

(2) 设$\{W_t,0\leqslant t<\infty\}$是一独立增量过程(定义见习题 1.4 之 10),对每 $t\geqslant 0$,$EW_t=0$. 令 $\mathscr{F}_t=\sigma(W_s,0\leqslant s\leqslant t)$,则$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是一个鞅. 事实上,这时对任 $t_2\geqslant t_1\geqslant 0$,由增量的独立性和条件期望的性质即得

$$E(W_{t_2}|\mathscr{F}_{t_1})=E(W_{t_1}+W_{t_2}-W_{t_1}|\mathscr{F}_{t_1})$$

$$= W_{t_1} + E(W_{t_2} - W_{t_1}) = 0 \quad \text{a.s.}.$$

(3) 设$\{W_t, 0\leqslant t\leqslant\infty\}$是独立增量过程，$f$是$[0,\infty)$上的非降函数而且对每$t\geqslant 0$, $EW_t=0$，对每$0\leqslant s\leqslant t<\infty$, $E(W_t-W_s)^2=f(t)-f(s)$. 令$S_t=W_t^2-f(t)$, $\mathscr{F}_t=\sigma(W_s, 0\leqslant s\leqslant t)$, $t\geqslant 0$. 对任$0\leqslant s\leqslant t<\infty$，我们有

$$\begin{aligned} E(S_t|\mathscr{F}_s) &= E(W_t^2 - f(t)|\mathscr{F}_s) \\ &= E[W_s^2 + 2W_s(W_t-W_s) + (W_t-W_s)^2 - f(t)|\mathscr{F}_s] \\ &= W_s^2 + 2W_sE(W_t - W_s) + E(W_t - W_s)^2 - f(t) \\ &= W_s^2 - f(s) = S_s \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

从而$\{W_t^2-f(t), \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$是一个鞅. 作为这个例子之特例，如果对任$t\geqslant 0$, $f(t)=t$，则$\{W_t^2-t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$形成一个鞅.

(4) 若$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是$L_1$中独立 r.v. 序列. 对每$n\geqslant 1$，令$S_n=\sum_{i=1}^n \xi_i$, $\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_i, 1\leqslant i\leqslant n)$. 容易验证，当对每$n\geqslant 1$均有$E\xi_n\geqslant 0$或对每$n\geqslant 1$，均有$E\xi_n=0$时，$\{S_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$分别是下鞅或鞅.

(5) 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是$m$相依序列($m\geqslant 0$)，即对每$n\geqslant 1$, $\sigma(\xi_i, 1\leqslant i\leqslant n)$与$\sigma(\xi_{n+m-i}, i\geqslant 1)$独立. 如果对每$n\geqslant 1$, $E\xi_n=0$，那么令

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_i, 1\leqslant i\leqslant n),$$

$$M_n = E(S_{n+m}|\mathscr{F}_n),$$

则对每$n\geqslant 1$均有

$$\begin{aligned} E(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= E[E(S_{n+m+1}|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n] \\ &= E(S_{n+m+1}|\mathscr{F}_n) \\ &= E(S_{n+m}|\mathscr{F}_n) + E(\xi_{n+m+1}|\mathscr{F}_n) \\ &= E(S_{n+m}|\mathscr{F}_n) = M_n \quad \text{a.s.}. \end{aligned}$$

这说明$\{M_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是一个鞅. 此例的特殊情形$m=0$就是例(4)中的鞅.

(6) 设 $P$ 和 $Q$ 是可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的二概率测度，$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是 $\mathscr{F}$ 可测函数，对每 $n\geqslant 1$，$\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$在测度 $P$ 和 $Q$ 下分别有密度 $p_n(x_1,\cdots,x_n)$和 $q_n(x_1,\cdots,x_n)$. 考虑似然比

$$M_n=\begin{cases} q_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)/p_n(\xi_1,\cdots,\xi_n), & p_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)>0, \\ 0, & p_n(\xi_1,\cdots,\xi_n)=0, \end{cases}$$

并令 $\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 我们来证明$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中的上鞅.

对每 $n\geqslant 1$，记 $\xi^{(n)}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$x^{(n)}=(x_1,\cdots,x_n)$. 由关系式

$$p_n(x^{(n)})=\int_R p_{n+1}(x^{(n+1)})\mathrm{d}x_{n+1}$$

推知当 $p_n(x^{(n)})=0$ 时，$\{x_{n+1}:p_{n+1}(x^{(n+1)})>0\}$是 Lebesgue 零测集. 因此，对任 $B\in\mathscr{R}^n$，有

$$\begin{aligned}
&\int_{\{\xi^{(n)}\in B\}}M_{n+1}\mathrm{d}P \\
=&\int_{\{\xi^{(n)}\in B\}\cap\{p_{n+1}(\xi^{(n+1)})>0\}}[q_{n+1}(\xi^{(n+1)})/p_{n+1}(\xi^{(n+1)})]\mathrm{d}P \\
=&\int\cdots\int_{(B\times R)\cap\{p_{n+1}(x^{(n+1)})>0\}} q_{n+1}(x^{(n-1)})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n+1} \\
=&\int\cdots\int_{(B\times R)\cap\{p_n(x^{(n)})>0,p_{n+1}(x^{(n+1)})>0\}} q_{n+1}(x^{(n+1)})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n+1} \\
\leqslant&\int\cdots\int_{B\cap\{p_n(x^{(n)})>0\}} q_n(x^{(n)})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\
=&\int_{\{\xi^{(n)}\in B\}\cap\{p_n(\xi^{(n)})>0\}}[q_n(\xi^{(n)})/p_n(\xi^{(n)})]\mathrm{d}P \\
=&\int_{\{\xi^{(n)}\in B\}}M_n\mathrm{d}P.
\end{aligned}$$

这表明 $E(M_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant M_n$ a.s.. 因此$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个上鞅.

(7) 设$\{\xi_k^{(n)}:k\geqslant 1;n\geqslant 1\}$是取非负整数值的独立同分布 r.v.

阵列，$E\xi_k^{(n)}=\mu>0$. 归纳地定义

$$\eta_0=1;\qquad \eta_n=\sum_{i=1}^{\eta_{n-1}}\xi_i^{(n)},\quad n\geqslant 1.$$

我们称 r. v. 列$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$是一个分枝过程，直观上，$\eta_n$ 解释为时刻 $n$ 细菌个体总数，$\xi_k^{(n)}$ 解释为从时刻 $n-1$ 到 $n$ 第 $k$ 个个体分裂成新的个体的数目，$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$描述了细菌分裂的过程.

令 $\mathscr{F}_n=\sigma(\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$M_n=\eta_n/\mu^n$. 注意$\{\xi_k^{(n+1)}, k\geqslant 1\}$与$(\eta_1,\cdots,\eta_n)$独立，我们有

$$\begin{aligned}E(\eta_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)&=E\Big(\sum_{i=1}^{\eta_n}\xi_i^{(n+1)}\mid\mathscr{F}_n\Big)\\&=E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}I_{(\eta_n=k)}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(n+1)}\mid\mathscr{F}_n\Big)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}I_{(\eta_n=k)}\sum_{i=1}^{k}E\xi_i^{(n+1)}\\&=\mu\eta_n\quad\text{a.s.}.\end{aligned}$$

上式两端再除以 $\mu^{n+1}$即得 $E(M_{n+1}\mid\mathscr{F}_n)=M_n$ a. s.. 这表明$\{M_n,\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是一个鞅.

### 1.4 下鞅序列的分解

下面，我们讨论适 r. v. 序列特别是下鞅序列与鞅序列的关系. 先介绍著名的 Doob 分解.

**定理 2.1.9** 对任一 $L_1$ 适可测函数列$\{S_n,\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$，存在一个 $L_1$ 鞅$\{M_n,\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$和 $L_1$ 适可测函数列$\{\eta_n,\mathscr{F}_{n-1}, n\geqslant 1\}$使 $\eta_1=0$ a.s. 及

(2.1.5) $$S_n=M_n+\eta_n, n\geqslant 1\quad\text{a.s.};$$

分解式(2.1.5)在下述意义下唯一：如果存在 $L_1$ 鞅$\{M_n^{(i)},\mathscr{F}_n^{(i)}, n\geqslant 1\}$，$i=1,2$ 和 $L_1$ 适可测函数列$\{\eta_n^{(i)},\mathscr{F}_{n-1}^{(i)}, n\geqslant 1\}$，$i=1,2$，满足

$\eta_1^{(i)}=0, i=1,2$ 并使

(2.1.6) $$S_n = M_n^{(i)} + \eta_n^{(i)}, n \geqslant 1 \quad \text{a.s.}$$

对 $i=1,2$ 成立，则

(2.1.7) $$M_n^{(1)} = M_n^{(2)}, \eta_n^{(1)} = \eta_n^{(2)}, n \geqslant 1 \quad \text{a.s.};$$

适可测函数列 $\{S_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 是一个 $L_1$ 下鞅当且仅当分解式(2.1.5)中的 $\{\eta_n, n\geqslant 1\}$ 是非降的；即对每 $n\geqslant 1$，$\eta_n \leqslant \eta_{n+1}$ a.s..

**证明** 按定理的三个部分分款证之.

(1) 分解的存在性. 令 $M_1=S_1$，$\eta_1=0$，再归纳地定义 $n>1$ 时，

$$\eta_n = E(S_n | \mathscr{F}_{n-1}) - M_{n-1};$$

$$M_n = S_n - \eta_n.$$

不难验证 $\{M_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 是一个 $L_1$ 鞅，对每 $n\geqslant 1$，$\eta_n$ 是关于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的并且(2.1.5)成立.

(2) 分解的唯一性. 按照唯一性的含义，由(2.1.7)推知当 $n>1$ 时

$$\begin{aligned} M_n^{(2)} - M_n^{(1)} &= \eta_n^{(1)} - \eta_n^{(2)} = E(\eta_n^{(1)} - \eta_n^{(2)} | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= E(M_n^{(2)} - M_n^{(1)} | \mathscr{F}_{n-1}) = M_{n-1}^{(2)} - M_{n-1}^{(1)} \quad \text{a.s.}. \end{aligned}$$

但是 $M_1^{(1)}=S_1=M_1^{(2)}$ a.s.，故由归纳法推知 $M_n^{(1)}=M_n^{(2)}$ a.s. 对每 $n\geqslant 1$ 成立，从而 $\eta_n^{(1)}=\eta_n^{(2)}$ a.s. 亦对每 $n\geqslant 1$ 成立. 此即(2.1.7).

(3) 下鞅的分解. 由(2.1.5)立得

$$\begin{aligned} E(S_n | \mathscr{F}_{n-1}) &= E(M_n + \eta_n | \mathscr{F}_{n-1}) = E(M_n | \mathscr{F}_{n-1}) + \eta_n \\ &= M_{n-1} + \eta_{n-1} + (\eta_n - \eta_{n-1}) = S_{n-1} + (\eta_n - \eta_{n-1}) \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

对每 $n>1$ 成立. 于是对每 $n>1$，$E(S_n | \mathscr{F}_{n-1}) \geqslant S_{n-1}$ a.s. 的充要条件是 $\eta_n \geqslant \eta_{n-1}$ a.s.，可见定理最后一个结论成立. 证完.

其次介绍下鞅的 Riesz 分解.

**定义 2.1.3** 非负 $L_1$ 上鞅 $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 如满足 $\lim\limits_{n\to\infty} EZ_n=0$ 就称为位势.

**定理 2.1.10** 设下鞅$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$满足条件$\sup\limits_{n\geqslant 1}E|S_n|<\infty$,则存在 $L_1$ 鞅$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$和位势$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$使

$$S_n = M_n - Z_n, n\geqslant 1 \quad \text{a.s.}. \tag{2.1.8}$$

分解在下述意义下是唯一的:如果还有一个 $L_1$ 鞅$\{M_n',\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$和一个位势$\{Z_n',\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$使

$$S_n = M_n' - Z_n', n\geqslant 1 \quad \text{a.s.}, \tag{2.1.9}$$

则 $M_n=M_n',Z_n=Z_n',n\geqslant 1$ a.s..

**证明** 对每 $n\geqslant 1,p\geqslant 1$,由下鞅定义得

$$\begin{aligned}E(S_{n+p+1}|\mathscr{F}_n) &= E[E(S_{n+p+1}|\mathscr{F}_{n+p})|\mathscr{F}_n]\\ &\geqslant E(S_{n+p}|\mathscr{F}_n) \quad \text{a.s.}.\end{aligned}$$

因此,对每 $n\geqslant 1$,下列定义有意义:

$$M_n := \lim_{p\to\infty}E(S_{n+p}|\mathscr{F}_n) \quad \text{a.s.}.$$

根据条件 Fatou 引理和条件 Jensen 不等式又可见

$$\begin{aligned}E|M_n| &= E\lim_{p\to\infty}|E(S_{n+p}|\mathscr{F}_n)| \leqslant \liminf_{p\to\infty}E|E(S_{n+p}|\mathscr{F}_n)|\\ &\leqslant \liminf_{p\to\infty}E|S_{n+p}| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}E|S_n| < \infty.\end{aligned}$$

因此对每 $n\geqslant 1,M_n\in L_1$. 由于 $S_n\leqslant E(S_{n+p}|\mathscr{F}_n)\leqslant M_n$, a.s.,并且 $S_n,M_n\in L_1$,对序列$\{E(S_{n+p}|\mathscr{F}_n),p\geqslant 1\}$用条件 Lebesgue 控制收敛定理便得

$$\begin{aligned}E(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= E[\lim_{p\to\infty}E(S_{n+p+1}|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n]\\ &= \lim_{p\to\infty}E[E(S_{n+p+1}|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n]\\ &= \lim_{p\to\infty}E(S_{n+p}|\mathscr{F}_n) = M_n \quad \text{a.s.}\end{aligned}$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立. 这证明了$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个鞅.

令

$$Z_n = M_n - S_n, \quad n\geqslant 1.$$

由于$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$和$\{-S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$都是上鞅(命题 2.1.1),故$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$仍是上鞅(命题 2.1.3). 又由于对每 $n\geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
(2.1.10)\qquad Z_n &\geqslant E(Z_{n-p}\mid\mathscr{F}_n)\\
&= E(M_{n+p}\mid\mathscr{F}_n) - E(S_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)\\
&= M_n - E(S_{n+p}\mid\mathscr{F}_n) \geqslant 0 \quad \text{a.s.},
\end{aligned}
$$

故$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是非负上鞅. 此外,据

$$EZ_n \leqslant E|M_n| + E|S_n| < \infty$$

和(2.1.10),对$\{E(Z_{n+p}\mid\mathscr{F}_n),p\geqslant 1\}$用 Lebesgue 控制收敛定理又得

$$
\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} EZ_{n+p} &= \lim_{p\to\infty} E[E(Z_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)]\\
&= E[\lim_{p\to\infty} E(Z_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)]\\
&= E[M_n - \lim_{p\to\infty} E(S_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)] = 0,
\end{aligned}
$$

可见$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是位势. 这样,我们就证明了 Riesz 分解(2.1.8)的存在性.

设 $L_1$ 鞅$\{M_n',\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$和位势$\{Z_n',\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$满足(2.1.9)而$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$和$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$如前,则有

$$
\begin{aligned}
(2.1.11)\qquad M_n &= \lim_{p\to\infty} E(S_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)\\
&= \lim_{p\to\infty} E(M'_{n+p} - Z'_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)\\
&= M'_n - \lim_{p\to\infty} E(Z'_{n+p}\mid\mathscr{F}_n) \quad \text{a.s.}.
\end{aligned}
$$

另一方面,由 Fatou 引理知

$$0 \leqslant E[\lim_{p\to\infty} E(Z'_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)] \leqslant \lim_{p\to\infty} EZ'_{n+p} = 0,$$

故有$\lim\limits_{p\to\infty} E(Z'_{n+p}\mid\mathscr{F}_n)=0$. 于是(2.1.11)给出对每 $n\geqslant 1$,

$$M_n = M'_n \quad \text{a.s.}$$

以及

$$Z_n = M_n - S_n = M'_n - S'_n = Z'_n \quad \text{a.s.}.$$

这又说明了分解的唯一性. 证完.

## 习 题 2.1

1. 证明命题 2.1.1.

2. 证明命题 2.1.2.

3. 证明命题 2.1.3.

4. 证明命题 2.1.7.

5. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是 $L_1$ 中独立同分布的 r.v.. 对每 $k=1,\cdots,n$，令 $S_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_i$，$\mathscr{F}_k=\sigma(S_n,\cdots,S_{n-k+1})$，$M_k=S_{n-k+1}/(n-k+1)$. 证明：$\{M_k,\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$ 是鞅.

6. 设 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 是独立 r.v. 序列，对每 $n\geqslant1$，$E\xi_n=0$，$E\xi_n^2=\sigma^2<\infty$. 令

$$M_n=\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big)^2-n\sigma^2;\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n),\quad n\geqslant1.$$

证明 $\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是鞅.

7. 设 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$ 是独立的正值 r.v. 列，对每 $n\geqslant1$，$E\xi_n=1$. 令

$$M_n=\prod_{k=1}^{n}\xi_k,\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n),\quad n\geqslant1.$$

证明 $\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是鞅.

8. 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，$\mu$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的有限测度，$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是一非降子 $\sigma$ 域列. 如果对每 $n\geqslant1$，$(\Omega,\mathscr{F}_n)$ 上的测度 $\mu$ 对于 $(\Omega,\mathscr{F}_n)$ 上的测度 $P$ 绝对连续，其 Radon-Nikodym 导数记为 $M_n$，则 $\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是鞅.

9. 设 $\Omega=(0,1]$，$\mathscr{F}=\mathscr{R}\cap(0,1]$，$P$ 是 $(0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. 对 $(0,1]$ 上任一 Lebesgue 可积函数 $f$，令

$$M_n=\sum_{k=0}^{2^n-1}\Big[2^n\int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n}f(t)\mathrm{d}t\Big]I_{(k/2^n,(k+1)/2^n]},\quad n\geqslant1.$$

又记

$$\mathscr{F}_n = \sigma((k/2^n,(k+1)/2^n],k=0,1,\cdots,2^n-1), \quad n \geqslant 1.$$

证明：$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个鞅.

10. 设$\{U_n,n\geqslant 1\}$是在(0,1)区间上均匀分布的独立r.v.序列，对每$n\geqslant 1$，以$U_{n,1}\leqslant\cdots\leqslant U_{n,n}$记$U_1,\cdots,U_n$的次序统计量. 对(0,1)上定义的任一给定Lebesgue可积函数$\varphi$，记

$$a_{n,i} = E\varphi(U_{n,i}), \quad i=1,\cdots,n;$$

对任一给定常数列$\{c_n,n\geqslant 1\}$，记

$$\bar{c}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i.$$

证明：如果$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立同分布的r.v.列并且其共同的d.f.连续，那么对每$n\geqslant 1$，记

$$R_{n,i} = \sum_{j=1}^{n} I_{\{\xi_i\geqslant\xi_j\}}, \quad i=1,\cdots,n;$$

$$M_n = \sum_{i=1}^{n}(c_i-\bar{c}_n)a_{n,R_{n,i}},$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(R_{n,1},\cdots,R_{n,n}),$$

则$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个鞅.

11. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立的$L_1$序列，对每$n\geqslant 1$，$E\xi_n=0$. 对给定的正整数$k$，令

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n), \quad n\geqslant k$$

$$M_{n,k} = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\xi_{i_1}\cdot\cdots\cdot\xi_{i_k}, \quad n\geqslant k.$$

证明：$\{M_{n,k},\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$是$L_1$鞅.

12. 证明：如$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是$L_2$鞅差列，则

(1) $\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\right\}$是$L_1$鞅差列；

(2) $\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\right\}$是$L_1$鞅.

13. 证明：如$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$是鞅差列，$\{\eta_k,\mathscr{F}_{k-1},k\geqslant 1\}$是适

可测函数列，而且对每 $k\geqslant 1$，$E\xi_k$ 和 $E\xi_k\eta_k$ 有意义，则 $\{\xi_k\eta_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 还是一个鞅差列.

14. 证明：适 $L_1$ 序列 $\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 是鞅差序列的充要条件是对每 $k\geqslant 1$ 和每个 $k$ 元有界 Borel 可测函数 $f$，有

$$E\xi_{k+1}f(\xi_1,\cdots,\xi_k)=0.$$

15. 举例说明：有这样的下鞅 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 和这样的连续凸函数 $g$，使得 $\{g(S_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 不是一个下鞅.

16. 设 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 $L_2$ 鞅，试求下鞅 $\{S_n^2,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 的 Doob 分解.

17. 设 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是满足条件 $\sup\limits_{n\geqslant 1}E|S_n|<\infty$ 的鞅. 证明：存在非负鞅 $\{M_n^{(i)},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$，$i=1,2$，使 $S_n=M_n^{(1)}-M_n^{(2)}$ a. s..

## 第二节 停时定理

### 2.1 停时的定义及性质

**定义 2.2.1** 设 $T\subset R$，$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 是可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上之非降 $\sigma$ 域族. 称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上取值于 $T\cup\{\infty\}$ 的可测函数 $\tau$ 为 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 的停时，如对每 $t\in T$ 有

$$\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t. \tag{2.2.1}$$

记 $\mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup\limits_{t\in T}\mathscr{F}_t\right)$，如果 $\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 的停时，那么称

$$\mathscr{F}_\tau=\{A\in\mathscr{F}_\infty : A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,t\in T\} \tag{2.2.2}$$

为停时 $\tau$ 的 $\sigma$ 域.

我们先叙述停时的简单性质.

**命题 2.2.1** 如 $\tau_1,\tau_2$ 是非降 $\sigma$ 域族 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 的停时，则 $\tau_1\vee\tau_2$，$\tau_1\wedge\tau_2$ 也是 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 的停时.

**证明** 对每 $t\in T$，由 $\{\tau_1\leqslant t\}$，$\{\tau_2\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ 推知

$$\{\tau_1 \vee \tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t;$$
$$\{\tau_1 \wedge \tau_2 \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.$$

**命题 2.2.2** 设 $T$ 具有性质:对任 $\{t_k,k\geqslant 1\}\subset T$,$t_k\uparrow t$,有 $t\in T$. 如对每 $k\geqslant 1$,$\tau_k$ 是 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 的停时且 $\tau_k\uparrow\tau$,则 $\tau$ 也是停时.

**证明** 对每 $k\geqslant 1$ 和 $t\in T$,由 $\{\tau_k\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ 推知

$$\{\tau \leqslant t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{\tau_k \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.$$

**命题 2.2.3** 如 $\tau$ 是非降 $\sigma$ 域族 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 的停时,则由(2.2.2)定义的 $\mathscr{F}_\tau$ 是一个 $\sigma$ 域而且 $\tau$ 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测.

**证明** 易见 $\Omega\in\mathscr{F}_\tau$. 如果 $A\in\mathscr{F}_\tau$,即 $A\in\mathscr{F}_\infty$ 且 $A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ 对每 $t\in T$ 成立,则 $A^c\in\mathscr{F}_\infty$ 且

$$A^c \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant t\}\backslash[A \cap \{\tau \leqslant t\}] \in \mathscr{F}_t, \quad t \in T,$$

从而 $A^c\in\mathscr{F}_\tau$. 如对每 $k\geqslant 1$,$A_k\in\mathscr{F}_\tau$ 亦即 $A_k\in\mathscr{F}_\infty$ 且 $A_k\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ 对任 $t\in T$ 成立,则 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \in \mathscr{F}_\infty$ 且

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)\cap\{\tau \leqslant t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}[A_k \cap \{\tau \leqslant t\}] \in \mathscr{F}_t, \quad t \in T,$$

从而 $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k \in \mathscr{F}_\tau$. 这说明 $\mathscr{F}_\tau$ 是 $\sigma$ 域. 又对任 $s\in T$ 有 $\{\tau\leqslant s\}\in\mathscr{F}_\infty$ 并且

$$\{\tau \leqslant s\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant s \wedge t\} \in \mathscr{F}_{s\wedge t} \subset \mathscr{F}_t, \quad t \in T,$$

故 $\{\tau\leqslant s\}\in\mathscr{F}_\tau$. 这说明 $\tau$ 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测. 证完.

**命题 2.2.4** 如 $\tau_1,\tau_2$ 都是非降 $\sigma$ 域 $\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$ 的停时且 $\tau_1\leqslant\tau_2$,则 $\mathscr{F}_{\tau_1}\subset\mathscr{F}_{\tau_2}$.

**证明** 如 $A\in\mathscr{F}_{\tau_1}$,则 $A\cap\{\tau_1\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$,$t\in T$,从而

$$A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = [A \cap \{\tau_1 \leqslant t\}] \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \quad t \in T.$$

这说明 $A\in\mathscr{F}_{\tau_2}$. 证完.

在今后的讨论中,最常见的是 $T=\{1,2,\cdots\}$ 和 $T=[0,\infty)$. 下

面我们就对这两种情形下停时的性质作进一步的讨论.

**命题 2.2.5** $\tau$ 是非降 $\sigma$ 域列 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时当且仅当

(2.2.3) $$\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n, \quad n \geqslant 1.$$

此时,停时 $\tau$ 的 $\sigma$ 域是

(2.2.4) $$\mathscr{F}_\tau = \{A \cap \mathscr{F}_\infty : A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}.$$

**命题 2.2.6** 设 $\{S_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 是适可测函数列, $\tau<\infty$ 是 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时,则 $S_\tau$ 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测.

**证明** 对每 $n\geqslant 1$, $x\in \boldsymbol{R}$,我们有

$$\{S_\tau \leqslant x\} \cap \{\tau = n\} = \{S_n \leqslant x\} \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

这说明 $\{S_\tau\leqslant x\}\in \mathscr{F}_\tau$. 证完.

这个命题说明,适可测函数列的"时刻" $n$ 用停时 $\tau$ 代替以后,"适"性仍得到保持. 这个事实对我们非常重要,下面,我们把它推广到 $\tau=[0,\infty)$ 的情形. 称随机过程 $\xi=\{\xi_t, t\geqslant 0\}$ 是右连续的,如果对每 $\omega\in\Omega$, $\xi_t(\omega)$ 作为 $t$ 的函数是右连续的.

**命题 2.2.7** 如果适随机过程 $\{\xi_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ 右连续, $\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的停时且 $\tau<\infty$,则 $\xi_\tau$ 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测.

**证明** 对每 $n\geqslant 1$,令

$$\xi_t^{(n)} = \xi_{([nt]+1)/n}, \quad t \geqslant 0,$$

其中 $[x]$ 表示 $x\in \boldsymbol{R}$ 的整数部分. 注意表示式

$$\xi_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{(k+1)/n} I_{[k/n,(k+1)/n)}(t), \quad t \geqslant 0,$$

可知对每 $t\geqslant 0$,每 $n\geqslant 1$, $\xi_s^{(n)}(\omega)$ 作为 $\Omega\times[0,t]$ 上的函数是关于 $\mathscr{F}_t\times\mathscr{R}[0,t]$ 可测的. 但是,由 $\xi$ 的右连续性知 $\xi_s^{(n)}(\omega)\to\xi_s(\omega)$,故 $\xi_s(\omega)$ 作为 $(\omega,s)\in\Omega\times[0,t]$ 的函数是 $\mathscr{F}_t\times\mathscr{R}[0,t]$ 可测的. 因为 $\tau\wedge t$ 关于 $\mathscr{F}_t$ 可测,故进一步又推知 $\xi_{\tau\wedge t}$ 关于 $\mathscr{F}_t$ 可测. 于是对每 $B\in\mathscr{R}$,有

$$\{\xi_\tau \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\xi_{\tau\wedge t} \in B\} \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t,$$

从而 $\xi_\tau$ 关于 $\mathscr{F}_\tau$ 可测. 证完.

下面，我们举两个停时的例子.

**例 1** 设$\{S_n,n\geqslant 1\}$是一 r.v. 序列，$\mathscr{F}_n=\sigma(S_1,\cdots,S_n)$，$B\in\mathscr{R}$. 约定 $\inf\varnothing=\infty$并称

$$\tau=\inf\{n\geqslant 1:S_n\in B\}$$

为$\{S_n,n\geqslant 1\}$第一次进入集合 $B$ 的时刻. 由于

$$\{\tau=n\}=\{S_i\in B^c,i=1,\cdots,n-1;S_n\in B\}\in\mathscr{F}_n\quad n\geqslant 1,$$

所以 $\tau$ 是一个停时.

**例 2** 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是 r.v. 序列，$\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 定义一串随机时刻如下：

$$\tau_1=1;$$

$$\tau_{k+1}=\inf\{n>\tau_k:\xi_n>\xi_{\tau_k}\},\quad k\geqslant 1.$$

显然，$\tau_1$ 是停时. 如果 $\tau_k$ 是停时，则

$$\{\tau_{k+1}=n\}=\bigcup_{i=1}^{n-1}\{\tau_k=i,\tau_{k+1}=n\}$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n-1}[\{\tau_k=i\}\cap\{\xi_{i+1}\leqslant\xi_i,\cdots,\xi_{n-1}\leqslant\xi_i,\xi_n>\xi_i\}]\in\mathscr{F}_n$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立，从而 $\tau_{k+1}$也是停时. 因此，$\{\tau_k,k\geqslant 1\}$是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的停时序列. 这个停时序列称为$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$破记录的时刻.

## 2.2 停时定理

从命题 2.2.6 和命题 2.2.7 知，对于适 r.v. 族$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$，把 $S_t$ 和 $\mathscr{F}_t$ 中的 $t$ 换成停时 $\tau$，适性即 $S_t$ 关于 $\mathscr{F}_t$ 的可测性在一定条件下仍可保持. 现在我们要问：在这样的替换以后，鞅或下鞅的性质是否仍可保持？换句话说，如果$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$是一个鞅(或下鞅)，$\tau$ 和 $\sigma$ 是$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$的停时且 $\tau\leqslant\sigma$，是不是有

$$E(S_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=S_\tau(\text{或}\geqslant S_\tau)\quad \text{a.s.?}$$

在讨论这个问题之前，先引进必要的术语和记号.

**定义 2.2.2** 设 $A,B$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$中的两个事件.

如果 $P(A\setminus B)=0$,称 $B$ 在 $A$ 上 a. s. 发生,记作 $B$ a. s. $A$ 或 $A\subset B$ a. s.;如果 $A\subset B$ a. s. 且 $B\subset A$ a. s.,则记为 $A=B$ a. s..

从上述定义出发,易得

**命题 2.2.8** 设带或不带足标的 $A,B,C$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的事件,则

(1) $B$ a. s. $A$ 当且仅当 $P(A)=P(A\cap B)$;

(2) $B$ a. s. $A$ 和 $C$ a. s. $B$ 蕴含 $C$ a. s. $A$;

(3) $B$ a. s. $A$,则 $B\cap C$ a. s. $A\cap C$;

(4) 对每 $n\geqslant 1$,$B$ a. s. $A_n$,则 $B$ a. s. $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$;

(5) 对每 $n\geqslant 1$,$B_n$ a. s. $A$,则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ a. s. $A$.

证明请读者完成.

**定理 2.2.9** 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个适可测函数列;对每 $n\geqslant 1$,$ES_n$ 有意义;$\sigma$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的 a. s. 有限的停时且 $ES_\sigma$ 有意义;$\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的停时,$ES_\tau I_{\{\tau\leqslant\sigma\}}$有意义. 则当$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是满足

$$\liminf_{n\to\infty} E\,S_n^+\,I_{\{\tau>n\}}=0 \tag{2.2.5}$$

的下鞅或满足

$$\liminf_{n\to\infty} E\,|S_n|\,I_{\{\sigma>n\}}=0 \tag{2.2.6}$$

的鞅时,分别有

$$E(S_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\geqslant S_\tau\ \text{a. s.}\ \{\tau\leqslant\sigma\} \tag{2.2.7}$$

或

$$E(S_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=S_\tau\ \text{a. s.}\ \{\tau\leqslant\sigma\}. \tag{2.2.8}$$

**证明** 只考虑下鞅的情形. 如果在这种情形已证得(2.2.7),那么当$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个鞅时,只要对下鞅$\{\pm S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$分别用(2.2.7)就可以得到(2.2.8).

首先,我们对 $\tau\equiv n(n\geqslant 1)$的情况来证明. 这时,(2.2.7)成为

$$E(S_\sigma | \mathscr{F}_n) \geqslant S_n \quad \text{a.s.} \{\sigma \geqslant n\},$$

亦即

$$E(S_\sigma I_{\{\sigma \geqslant n\}} | \mathscr{F}_n) \geqslant S_n I_{\{\sigma \geqslant n\}} \quad \text{a.s.}. \tag{2.2.9}$$

对每 $A \in \mathscr{F}_n$,利用下鞅的性质可得

$$\begin{aligned}
ES_n I_{A\cap\{\sigma \geqslant n\}} &= ES_n I_{A\cap\{\sigma=n\}} + ES_n I_{A\cap\{\sigma \geqslant n+1\}} \\
&\leqslant ES_\sigma I_{A\cap\{\sigma=n\}} + ES_{n+1} I_{A\cap\{\sigma \geqslant n+1\}} \leqslant \cdots \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{n+m} ES_\sigma I_{A\cap\{\sigma=i\}} + ES_{n+m+1} I_{A\cap\{\sigma \geqslant n+m+1\}} \\
&= \sum_{i=n}^{n+m+1} ES_\sigma I_{A\cap\{\sigma=i\}} + ES_{n+m+1} I_{A\cap\{\sigma > n+m+1\}} \\
&\leqslant ES_\sigma I_{A\cap\{n \leqslant \sigma \leqslant n+m+1\}} + ES^+_{n-m+1} I_{\{\sigma > n+m+1\}}.
\end{aligned}$$

上式令 $m \to \infty$,由(2.2.5)推知

$$ES_\sigma I_{A\cap\{\sigma \geqslant n\}} \geqslant ES_n I_{A\cap\{\sigma \geqslant n\}}$$

对每 $A \in \mathscr{F}_n$ 成立.这等价于(2.2.9).因此当 $\tau \equiv n$ 时(2.2.7)对下鞅成立.

再对一般的符合定理条件的停时 $\tau$ 来证明(2.2.7).注意$\{\tau \leqslant \sigma\} \in \mathscr{F}_\tau$,可见(2.2.7)等价于

$$E[S_\sigma I_{\{\tau \leqslant \sigma\}} | \mathscr{F}_\tau] \geqslant S_\tau I_{\{\tau \leqslant \sigma\}} \quad \text{a.s.}. \tag{2.2.10}$$

对每 $A \in \mathscr{F}_\tau$,有 $A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$,因而由(2.2.9)得

$$\begin{aligned}
ES_\tau I_{A\cap\{\tau \leqslant \sigma\}} &= \sum_{n=1}^{\infty} ES_n I_{A\cap\{\tau=n\}\cap\{\sigma \geqslant n\}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} ES_\sigma I_{A\cap\{\tau=n\}\cap\{\sigma \geqslant n\}} \\
&= ES_\sigma I_{A\cap\{\tau \leqslant \sigma\}},
\end{aligned}$$

即(2.2.10)成立.证完.

作为定理 2.2.9 的推论,我们得

**系 2.2.10** 设$\{S_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是适可测函数列;对每 $n \geqslant 1$, $ES_n$ 有意义;$\sigma$ 是$\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$的有界停时,即 $\sigma$ 是停时且存在正整数 $k$ 使 $P(\sigma \leqslant k) = 1$.则当$\{S_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是下鞅或鞅时,(2.2.7)或(2.2.8)分别对$\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$的任一停时 $\tau$ 成立.

利用定理 2.2.9，我们还可回答前面提出的关于"鞅性"是否继续保持的问题.

**系 2.2.11** 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是适可测函数列；对每 $n\geqslant 1$，$ES_n$ 有意义；$\sigma$ 和 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的停时，$\tau\leqslant\sigma<\infty$ a.s.，$ES_\sigma$ 和 $ES_\tau$ 有意义. 则当$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$分别是满足(2.2.5)的下鞅或满足(2.2.6)的鞅时，$\{S_\tau,\mathscr{F}_\tau;S_\sigma,\mathscr{F}_\sigma\}$分别形成下鞅或鞅.

**证明** 由命题 2.2.4 知$\{\mathscr{F}_\tau,\mathscr{F}_\sigma\}$是(仅有两个 $\sigma$ 域的)非降 $\sigma$ 域族. 由命题 2.2.6 又知$\{S_\tau,\mathscr{F}_\tau;S_\sigma,\mathscr{F}_\sigma\}$是适的. 最后，利用定理 2.2.9 即得所要之结论. 证完.

## 2.3 Wald 公式——对于期望

我们将把停时定理用于鞅差序列，以得到所谓的 Wald 公式的推广. 然后把它具体到独立 r.v. 序列，得到 Wald 公式. 为了方便起见，如果$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个 $L_1$ 下鞅，对每 $n\geqslant 1$，令 $\xi_1=S_1$；

$$\xi_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{a.s.}, \quad n > 1,$$

我们将称适可测函数列$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为一个下鞅差列. 不难见，一个 $L_1$ 适可测函数列$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是下鞅差列当且仅当

$$E(\xi_{n+1}|\mathscr{F}_n) \geqslant 0 \quad \text{a.s.}, \quad n \geqslant 1.$$

**引理 2.2.12** 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是任一 r.v. 序列，$\tau$ 是 $\Omega$ 上取值于正整数的函数，则对每 $n\geqslant 1$，有

$$\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k = \sum_{k=1}^{n}\xi_k I_{\{\tau\geqslant k\}}. \tag{2.2.11}$$

**证明** 对每 $n\geqslant 1$，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k &= \sum_{i=1}^{n-1} I_{\{\tau=i\}}\sum_{k=1}^{i}\xi_k + I_{\{\tau\geqslant n\}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\sum_{i=k}^{n-1} I_{\{\tau=i\}} + I_{\{\tau\geqslant n\}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k I_{\{k \leqslant \tau < n\}} + I_{\{\tau \geqslant n\}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k I_{\{\tau \geqslant k\}} + \xi_n I_{\{\tau \geqslant n\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{\tau \geqslant k\}}.$$

证完.

**引理 2.2.13** 如 $\tau$ 是非降 $\sigma$ 域列 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 的停时, $\tau < \infty$ a.s.,则对任非负可测函数列 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 有

$$E\left(\sum_{k=1}^{\tau} \xi_k\right) = E\left[\sum_{k=1}^{\tau} E(\xi_k | \mathscr{F}_{k-1})\right]. \tag{2.2.12}$$

**证明** 由(2.2.11)得

$$E\left(\sum_{k=1}^{\tau \wedge n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E\xi_k I_{\{\tau \geqslant k\}}, \quad n \geqslant 1.$$

上式中令 $n \to \infty$,又有

$$E\left(\sum_{k=1}^{\tau} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k I_{\{\tau \geqslant k\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[E(\xi_k | \mathscr{F}_{k-1}) I_{\{\tau \geqslant k\}}]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[E(\xi_k | \mathscr{F}_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} I_{\{\tau = n\}}\right]$$

$$= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{\tau = n\}} \sum_{k=1}^{n} E(\xi_k | \mathscr{F}_{k-1})\right]$$

$$= E \sum_{k=1}^{\tau} E(\xi_k | \mathscr{F}_{k-1}).$$

证完.

**定理 2.2.14** 设 $\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 $L_1$ 适可测函数列, $\sigma$ 是 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 的停时, $\sigma < \infty$ a.s.. 则当 $\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是满足条件

(2.2.13) $$E\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n^- < \infty$$

的下鞅差列或满足

(2.2.14) $$E\sum_{n=1}^{\sigma}|\xi_n| < \infty$$

的鞅差列时，对$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$的任一停时$\tau$分别有

(2.2.15) $$E\Big(\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n\,|\,\mathscr{F}_\tau\Big)\geqslant\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n\quad \text{a.s.}\ \{\sigma\geqslant\tau\}$$

或

(2.2.16) $$E\Big(\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n\,|\,\mathscr{F}_\tau\Big)=\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n\quad \text{a.s.}\ \{\sigma\geqslant\tau\}.$$

**证明** 仅需对下鞅的情形给出证明. 记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k, n\geqslant 1$. 注意

$$ES_\sigma^- = E\Big(\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n\Big)^- \leqslant E\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n^- < \infty,$$

$$E[S_\tau I_{\{\sigma\geqslant\tau\}}]^+ = E\Big[\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n I_{\{\sigma\geqslant\tau\}}\Big]^+ \leqslant E\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n^+ < \infty,$$

可知$ES_\sigma, ES_\tau I_{\{\sigma\geqslant\tau\}}$有意义；又注意(2.2.13)还蕴含

$$ES_n^+ I_{\{\sigma>n\}} \leqslant EI_{\{\sigma>n\}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^+ \leqslant EI_{\{\sigma>n\}}\sum_{k=1}^{\sigma}\xi_k^+ \to 0,$$

故定理 2.2.9 之诸条件满足，(2.2.7)成立. 但此时(2.2.7)就是(2.2.15). 证完.

**系 2.2.15** 设$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是$L_1$鞅差序列，$\sigma$是$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$的停时，$\sigma<\infty$ a.s.. 如果(2.2.14)成立，则

(2.2.17) $$E\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n = E\xi_1.$$

**证明** 把定理 2.2.14 用于$\tau\equiv 1$的情形，(2.2.16)变成

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\sigma}\xi_n\,|\,\mathscr{F}_1\Big)=\xi_1\quad \text{a.s.}.$$

上式两端取期望即得(2.2.17). 证完.

不难看出,(2.2.17)乃是命题 2.1.2 向停时的推广,我们无妨称它为对鞅差序列部分和也就是鞅的 Wald 公式. 正宗的 Wald 公式是对独立同分布 r.v. 序列部分和说的,我们把它作为一个系证明如下. 为了行文简洁,"独立同分布"今后将缩写成 i.i.d..

**系 2.2.16** 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是 i.i.d. r.v. 列;对每 $n\geqslant 1$,令 $\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$,设 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$的可积停时. 如果 $E\xi_1$ 存在,则

$$E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n = E\tau\cdot E\xi_1. \tag{2.2.18}$$

**证明** 先设 $E|\xi_1|<\infty$. 由(2.2.12)和独立性得

$$\begin{aligned}E\sum_{n=1}^{\tau}|\xi_n - E\xi_n| &= E\sum_{n=1}^{\tau}E(|\xi_n - E\xi_n|\,|\mathscr{F}_{n-1}) \\ &= E\sum_{n=1}^{\tau}E|\xi_1 - E\xi_1| \leqslant 2E\tau\cdot E|\xi_1| < \infty.\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

把系 2.2.15 用于鞅差列$\{\xi_n - E\xi_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$,有

$$E\sum_{n=1}^{\tau}(\xi_n - E\xi_n) = E(\xi_1 - E\xi_1) = 0,$$

即(2.2.18)成立.

次设 $E\xi_1=\infty$,即 $E\xi_1^+=\infty$和 $E\xi^-<\infty$的情况. 由 $E\tau<\infty$推知 $P(\tau<\infty)=1$ 推知存在 $n\geqslant 1$ 使 $P(\tau=n)>0$. 故此时(2.2.18)之右端

$$\begin{aligned}E\tau\cdot E\xi_1 &= E\tau\cdot E\xi_1^+ - E\tau\cdot E\xi_1^- \\ &\geqslant nP(\tau=n)E\xi_1^+ - E\tau\cdot E\xi_1^- = \infty.\end{aligned}$$

此外,对$\{\xi_n^-, n\geqslant 1\}$用已证之结论,得

$$E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n = E\tau\cdot E\xi_1^- < \infty.$$

故(2.2.18)之左端

$$E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n = E\sum_{n=1}^{\tau}(\xi_n^+ - \xi_n^-) = E\Big(\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^+ - \sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^-\Big)$$

$$= E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^+ - E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^- \geqslant E\xi_1^+ - E\tau\cdot E\xi_1^- = \infty.$$

由此可见此时(2.2.18)仍成立.

$E\xi_1=-\infty$时的证明与$E\xi_1=\infty$时类似,略. 证完.

### 2.4 Wald 公式——对于方差

对于同分布之 $n$ 个 r.v. $\xi_1,\cdots,\xi_n$,如果期望存在,就有

$$E\sum_{n=1}^{k}\xi_n = kE\xi_1.$$

上一小节的(2.2.18)可看成是上式把 $k$ 推广成停时 $\tau$. 对于 i.i.d. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的方差,还有一个熟知的公式

$$\mathrm{var}\sum_{n=1}^{k}\xi_n = k\mathrm{var}\xi_1,\quad k\geqslant 1.$$

这个公式中的 $k$ 是否也可以推广到停时呢?回答是肯定的. 我们的办法还是先讨论鞅差序列,把(2.1.4)式推广为

(2.2.20) $$E\Big(\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n\Big)^2 = E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^2,$$

然后再落实到 i.i.d. 序列上去.

**引理 2.2.17** 如果$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是 $L_2$ 鞅差列,则对任一停时 $\tau$,有

(2.2.21) $$E\Big(\sum_{n=1}^{\tau\wedge k}\xi_n\Big)^2 = E\sum_{n=1}^{\tau\wedge k}\xi_n^2,\quad k\geqslant 1;$$

如果 $\tau<\infty$ a.s.,则进一步还有

(2.2.22) $$E\Big(\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n\Big)^2 \leqslant E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^2.$$

**证明** 这时,记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,n\geqslant 1$,则$\Big\{S_n^2-\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\Big\}$是 $L_1$ 鞅(习题 2.1 之 12). 因此,$\Big\{S_{\tau\wedge n}^2-\sum_{i=1}^{\tau\wedge n}\xi_i^2,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\Big\}$还是

$L_1$ 鞅(习题 2.2 之 9). 对任 $k\geqslant 1$,

$$E\left|S_{\tau\wedge k}^2-\sum_{i=1}^{\tau\wedge k}\xi_i^2\right|\leqslant 2E\sum_{i=1}^{\tau\wedge k}\left|\xi_i S_{i-1}\right|$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{k}E|\xi_i S_{i-1}|\leqslant 2\sum_{i=1}^{k}(E\xi_i^2)^{1/2}(ES_{i-1}^2)^{1/2}<\infty,$$

故由系 2.2.15 得

$$E\left(S_{\tau\wedge k}^2-\sum_{i=1}^{\tau\wedge k}\xi_i^2\right)=E(S_1^2-\xi_1^2)=0,$$

即(2.2.21)成立. 当 $\tau<\infty$ a.s. 时,于(2.2.20)中令 $n\to\infty$,利用 Fatou 引理和单调收敛定理又得

$$ES_\tau^2\leqslant\liminf_{k\to\infty}ES_{\tau\wedge k}^2=\liminf_{k\to\infty}E\sum_{i=1}^{\tau\wedge k}\xi_i^2=E\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i^2,$$

即(2.2.22)成立. 证完.

**定理 2.2.18** 如 $\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 $L_2$ 鞅差列,$\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 的停时,$\tau<\infty$ a.s.,对每 $n\geqslant 1$,记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 则下列条件之一成立时,(2.2.20)成立:

(1) $\liminf\limits_{n\to\infty}E|S_n|I_{(\tau>n)}=0$;

(2) $E\sum\limits_{n=1}^{\tau}|\xi_n|<\infty$;

(3) $\liminf\limits_{n\to\infty}ES_n^2I_{(\tau>n)}<\infty$;

(4) $E\sum\limits_{n=1}^{\tau}\xi_n^2<\infty$.

**证明** 由于已有(2.2.22),故只需再证条件(1)—(4)之一蕴含

$$E\left(\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n\right)^2\geqslant E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^2. \tag{2.2.23}$$

先证条件(1)蕴含(2.2.23). 对每 $n\geqslant 1$,我们有

$$E(S_\tau^2|\mathscr{F}_n)I_{\{\tau<n\}}=E(S_\tau^2I_{\{\tau<n\}}|\mathscr{F}_n)=\sum_{i=1}^{n-1}E(S_i^2I_{\{\tau=i\}}|\mathscr{F}_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}S_i^2I_{\{\tau=i\}}=S_\tau^2I_{\{\tau<n\}}=S_{\tau\wedge n}^2I_{\{\tau<n\}}\quad \text{a.s.}.$$

另外在条件(1)之下，对下鞅$\{|S_n|,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$可用定理 2.2.9 之(2.2.7)(取那里的 $\sigma$ 为这里的 $\tau$，那里的 $\tau$ 为常停时 $n$)而得

$$E(S_\tau^2|\mathscr{F}_n)I_{\{\tau\geqslant n\}}\geqslant E^2(|S_\tau||\mathscr{F}_n)I_{\{\tau\geqslant n\}}$$

$$\geqslant S_n^2I_{\{\tau\geqslant n\}}=S_{\tau\wedge n}^2I_{\{\tau\geqslant n\}}\quad \text{a.s.}.$$

合并以上所得两式，得到

$$E(S_\tau^2|\mathscr{F}_n)\geqslant S_{\tau\wedge n}^2\quad \text{a.s.},\quad n\geqslant1.$$

上式两端取 $E$ 并用(2.2.21)又推知

$$ES_\tau^2\geqslant ES_{\tau\wedge n}^2=E\sum_{i=1}^{\tau\wedge n}\xi_i^2,\quad n\geqslant1.$$

上式再令 $n\to\infty$即得(2.2.23).

因为(2)蕴含(1)，故也蕴含(2.2.23).

往证(3)蕴含(2)，从而也蕴含(2.2.23). 对任意给定的 $\alpha>0$，有

$$E|S_n|I_{\{\tau>n\}}=E|S_n|I_{\{\tau>n,|S_n|>\alpha\}}+E|S_n|I_{\{\tau>n,|S_n|\leqslant\alpha\}}$$

$$\leqslant\alpha^{-1}ES_n^2I_{\{\tau>n\}}+\alpha P(\tau>n).$$

因此，在(3)之下，$\limsup\limits_{n\to\infty}E|S_n|I_{\{\tau>n\}}=0$ 从而(1)必须成立.

最后证(4)蕴含(3)从而也蕴含(2.2.23). 约定 $S_0=0$，我们得

$$ES_n^2I_{\{\tau>n\}}=\sum_{i=1}^{n}(ES_i^2I_{\{\tau>i\}}-ES_{i-1}^2I_{\{\tau>i-1\}})$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}E(S_i^2-S_{i-1}^2)I_{\{\tau\geqslant i\}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E\xi_i^2I_{\{\tau\geqslant i\}}+2\sum_{i=1}^{n}E\xi_iS_{i-1}I_{\{\tau\geqslant i\}},\quad n\geqslant1.$$

但是，对每 $i\geqslant 1$，

$$E\xi_i S_{i-1} I_{\{\tau\geqslant i\}} = E[E(\xi_i S_{i-1} I_{\{\tau\geqslant i\}} | \mathscr{F}_{i-1})]$$
$$= E[S_{i-1} I_{\{\tau\geqslant i\}} E(\xi_i | \mathscr{F}_{i-1})] = 0,$$

故进而又得

$$ES_n^2 I_{\{\tau>n\}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} E\xi_i^2 I_{\{\tau\geqslant i\}} = E\sum_{i=1}^{\tau\wedge n}\xi_i^2, \quad n\geqslant 1.$$

由此可见

$$\limsup_{n\to\infty} ES_n^2 I_{\{\tau>n\}} \leqslant E\sum_{i=1}^{\tau}\xi_i^2,$$

故(4)蕴含(3). 定理证完.

**系 2.2.19** 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是 i. i. d. r. v. 序列，$E\xi_1=0$，$E\xi_1^2<\infty$；对每 $n\geqslant 1$，令 $\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，设 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$的可积停时. 则

$$(2.2.24) \qquad E\Big(\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n\Big)^2 = E\tau\cdot E\xi_1^2.$$

**证明** 不难见此时$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是 $L_2$ 鞅差且(2.2.19)仍成立，但由于 $E\xi_1=0$，故(2.2.19)就是定理 2.2.18 之条件(2). 于是由(2.2.20)，(2.2.12)和独立性得

$$E\Big(\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n\Big)^2 = E\sum_{n=1}^{\tau}\xi_n^2 = E\sum_{n=1}^{\tau}E(\xi_n^2|\mathscr{F}_{n-1})$$
$$= E\sum_{n=1}^{\tau}E\xi_n^2 = E\tau\cdot E\xi_1^2.$$

证完.

### 2.5 Wald 公式向连续参数鞅的推广

停时定理的结果在一定条件下可以推广到连续参数鞅的情形. 我们不拟全面展开这方面的讨论，而只给出(2.2.17)的一个推广，以备引用.

**定理 2.2.20** 设$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是一个右连续 $L_1$ 鞅，$\tau$ 是$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的有限值停时. 如果

(2.2.25) $$E|S_\tau|<\infty,$$

(2.2.26) $$\liminf_{t\to\infty} E|S_t|I_{\{\tau>t\}}=0,$$

则我们有

(2.2.27) $$E(S_\tau|\mathscr{F}_0)=S_0 \quad \text{a.s.};$$

(2.2.28) $$ES_\tau=ES_0.$$

**证明** 任意固定 $t>0$. 对每 $n\geqslant 1$，令

$$\tau_n=\sum_{i=1}^{n}(it/n)I_{\{(i-1)t/n<\tau\leqslant it/n\}}.$$

由于$\{|S_t|,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是下鞅(见系 2.1.6)，对每 $\lambda>0$ 和 $a>0$，有

$$\begin{aligned}
&E|S_{\tau_n}I_{\{\tau\leqslant t\}}|I_{\{|S_{\tau_n}I_{\{\tau\leqslant t\}}|>\lambda\}}\\
&=E|S_{\tau_n}|I_{\{|S_{\tau_n}|>\lambda,\tau\leqslant t\}}\\
&=\sum_{i=1}^{n}E|S_{it/n}|I_{\{|S_{it/n}|>\lambda,(i-1)t/n<\tau\leqslant it/n\}}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}E|S_t|I_{\{|S_{it/n}|>\lambda,(i-1)t/n<\tau\leqslant it/n\}}\\
&=E|S_t|I_{\{|S_{\tau_n}|I_{\{\tau\leqslant t\}}>\lambda\}}\\
&\leqslant aP(|S_{\tau_n}|I_{\{\tau\leqslant t\}}>\lambda)+E|S_t|I_{\{|S_t|>a\}},\quad n\geqslant 1.
\end{aligned}$$

但是，对每 $n\geqslant 1$，又有

$$\begin{aligned}
P(|S_{\tau_n}|I_{\{\tau\leqslant t\}}>\lambda)&\leqslant\lambda^{-1}E|S_{\tau_n}|I_{\{\tau\leqslant t\}}\\
&=\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}E|S_{it/n}|I_{\{(i-1)t/n<\tau\leqslant it/n\}}\\
&\leqslant\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}E|S_t|I_{\{(i-1)t/n<\tau\leqslant it/n\}}\\
&\leqslant\lambda^{-1}E|S_t|.
\end{aligned}$$

因此，我们得

$$\sup_{n\geqslant 1}E|S_{\tau_n}I_{\{\tau\leqslant t\}}|I_{\{|S_{\tau_n}I_{\{\tau\leqslant t\}}|>\lambda\}}$$
$$\leqslant (\alpha/\lambda)E|S_t| + E|S_t|I_{\{|S_t|>\alpha\}}.$$

上式中先令 $\lambda\to\infty$，再令 $\alpha\to\infty$，便知 $\{S_{\tau_n}I_{\{\tau\leqslant t\}}, n\geqslant 1\}$ 是一致可积的.

对每 $A\in\mathscr{F}_0$，利用鞅的性质可得

$$ES_{\tau_n}I_{A\cap\{\tau\leqslant t\}} = \sum_{i=1}^{n} ES_{it/n}I_{A\cap\{(i-1)t/n<\tau\leqslant it/n\}}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} ES_tI_{A\cap\{(i-1)t/n<\tau\leqslant it/n\}} = ES_tI_{A\cap\{\tau\leqslant t\}}.$$

上式取极限，利用 $\{S_{\tau_n}I_{A\cap\{\tau\leqslant t\}}, n\geqslant 1\}$ 的一致可积性，$\{S_t, t\geqslant 0\}$ 的右连续性及 $\tau_n\downarrow\tau$ 可得

$$ES_\tau I_{A\cap\{\tau\leqslant t\}} = ES_tI_{A\cap\{\tau\leqslant t\}},\quad A\in\mathscr{F}_0.$$

于是，当 $A\in\mathscr{F}_0$ 时，对每 $t\geqslant 0$ 有

$$ES_0I_A = ES_tI_A = ES_tI_{A\cap\{\tau\leqslant t\}} + ES_tI_{A\cap\{\tau>t\}}$$
$$= ES_\tau I_{A\cap\{\tau\leqslant t\}} + ES_tI_{A\cap\{\tau>t\}}.$$

此式再令 $t\to\infty$，由(2.2.25)和(2.2.26)推得(2.2.27). 对(2.2.27)两端取 $E$，又得(2.2.28). 证完.

## 习 题 2.2

1. 证明命题 2.2.5.

2. 证明：如果 $\sigma$ 和 $\tau$ 是非降 $\sigma$ 域 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时，则 $\sigma+\tau$ 亦是 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时. 试问如 $\sigma$ 和 $\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时，$\sigma-\tau$ 是否是 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时?

3. 证明：如 $\sigma$ 是非降 $\sigma$ 域 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时，$\mathscr{F}_\sigma$ 可测的整数值 r.v. $\tau\geqslant\sigma$，则 $\tau$ 亦是 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时.

4. 证明：如 $\sigma$ 和 $\tau$ 是非降 $\sigma$ 域 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 的停时，则

$$\{\sigma \leqslant \tau\},\{\tau \leqslant \sigma\},\{\tau = \sigma\} \in \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}.$$

5. 设$\{\xi_n,n\geqslant1\}$是独立 r.v. 列. 记

$$\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n),\mathscr{F}^n = \sigma(\xi_n,\xi_{n+1},\cdots),\quad n \geqslant 1.$$

证明:取正整数值的 r.v. $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$的停时当且仅当对每 $n\geqslant 1$,$\{\tau=n\}$与 $\mathscr{F}^n$ 独立.

6. 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是一适 r.v. 列,$\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$的停时. 令

$$S_\tau(\omega) = \begin{cases} S_{\tau(\omega)}(\omega), & \tau(\omega) < \infty, \\ \limsup\limits_{n\to\infty} S_n(\omega), & \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

证明 $S_\tau$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测函数.

7. 设对每 $n>1$,r.v. $\eta_n$ 只取值 0 和 1,$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是非降 $\sigma$ 域. 证明:r.v. 序列$\{\eta_{n+1},\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是适的当且仅当 $\eta_n=I_{\{\tau\geqslant n\}}$,$n\geqslant1$,其中 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$的停时.

8. 证明命题 2.2.8.

9. 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是一(下)鞅,$\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$的停时,证明:$\{S_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$仍是(下)鞅.

10. 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是一(下)鞅,$\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$的停时. 证明:$\{S_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_{\tau\wedge n},n\geqslant1\}$仍是(下)鞅.

11. 设 $\left\{S_n = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i,\mathscr{F}_n,n \geqslant 1\right\}$ 是一个(下)鞅,$\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$的停时且 $E\tau<\infty$. 如果存在 $C>0$ 使

$$E(|\xi_k|\,|\,\mathscr{F}_{k-1}) \leqslant C \quad \text{a.s. } \{\tau \geqslant k\}$$

对每 $k\geqslant1$ 成立,证明 $E|S_\tau|<\infty$ 且

$$ES_\tau(\geqslant) = ES_1.$$

12. 设$\{\xi_n,n\geqslant1\}$是独立同分布 r.v. 列,

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = 1/2.$$

令 $\tau = \inf\left\{n \geqslant 1: \sum\limits_{i=1}^n \xi_i = 0\right\}$. 问(2.2.24)是否成立?

13. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$如题 12，对$-\infty<a<0<b<\infty$，令

$$\tau=\inf\left\{n\geqslant 1:\sum_{i=1}^{n}\xi_i\leqslant a \text{ 或 } \sum_{i=1}^{n}\xi_i\geqslant b\right\}.$$

证明$\tau$是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的停时且

$$P(S_\tau=a)=b/(b-a),P(S_\tau=b)=-a/(b-a),$$

其中$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,n\geqslant 1$.

14. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$独立同分布. 对每$n\geqslant 1$，令

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i;\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n).$$

又设$\tau$是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的可积停时，存在$C>0$使

$$E(|S_n|I_{(\tau>n)}|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant C$$

对每$n\geqslant 1$成立. 证明：如果对某$t_0>0$，

$$M(t)=E\exp(t\xi_1)<\infty$$

对一切$|t|\leqslant t_0$成立，则当$t\in[-t_0,t_0]$时，

$$\{U_n=:\mathrm{e}^{tS_n}/M^n(t),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$$

是一个鞅并且$EU_\tau=1$.

15. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$独立同分布，其共同 d.f. 为$F$. 令$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$为例 2 中的停时序列并记

$$\omega_F=\sup\{x\in\boldsymbol{R}:F(x)<1\}.$$

证明下列命题等价：

(1) 对每$k\geqslant 1$，$\tau_k<\infty$ a.s.；

(2) 存在$k>1$使$\tau_k<\infty$ a.s.；

(3) $\omega_F=\infty$或$\omega_F<\infty$但$F$在$\omega_F$连续.

16. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$独立同标准指数分布，令$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$为例 2 中的停时序列，记

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\quad n\geqslant 1.$$

证明：$\{\xi_{\tau_k},k\geqslant 1\}$与$\{S_k,k\geqslant 1\}$有相同之分布.

17. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是 $m$ 相依序列，对每 $n\geqslant 1$，$E|\xi_n|<\infty$，又 $\tau$ 是$\{\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n),n\geqslant 1\}$的可积停时. 证明

$$ES_{\tau+m}=(E\tau+m)E\xi_1,$$

其中 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i, n\geqslant 1$.

18. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是非负的非退化的独立同分布 r.v. 列，记

$$S_0=0;\qquad S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\quad n\geqslant 1.$$

对每 $t\geqslant 0$，令

$$N(t)=\sup\{n\geqslant 1:S_n\leqslant t\}.$$

称$\{N(t),t\geqslant 0\}$为更新过程. 证明

(1) 对每 $t\geqslant 0$，$EN(t)<\infty$；

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)/t=1/E\xi_1$ a.s.；

(3) $\lim\limits_{t\to\infty}EN(t)/t=1/E\xi_1$.

19. 把定理 2.2.20 推广到 $\tau<\infty$ a.s. 的情形.

## 第三节 收 敛 定 理

### 3.1 下鞅基本收敛定理

鞅的收敛定理是鞅论中极为重要的内容，而 Doob 关于下鞅的收敛定理则是关于收敛定理一切讨论的出发点.

**定义 2.3.1** 设 $x_1,\cdots,x_n\in\boldsymbol{R}^-$；$a,b\in\boldsymbol{R}$，$a<b$. 令

$$\tau_1=\begin{cases}\min\{i:1\leqslant i\leqslant n,x_i\leqslant a\}, & \{i:1\leqslant i\leqslant n,x_i\leqslant a\}\neq\varnothing,\\ n+1, & \text{其他；}\end{cases}$$

又对 $k\geqslant 1$，归纳地令

$$\tau_{2k}=\begin{cases}\min\{i:\tau_{2k-1}<i\leqslant n,x_i\geqslant b\}, & \{i:\tau_{2k-1}<i\leqslant n,x_i\geqslant b\}\neq\varnothing,\\ n+1, & \text{其他};\end{cases}$$

$$\tau_{2k+1}=\begin{cases}\min\{i:\tau_{2k}<i\leqslant n,x_i\leqslant a\}, & \{i:\tau_{2k}<i\leqslant n,x_i\leqslant a\}\neq\varnothing,\\ n+1, & \text{其他}.\end{cases}$$

称$\{\tau_k,k\geqslant 1\}$为$\{x_1,\cdots,x_n\}$对区间$(a,b)$的穿时序列，$U(a,b)=\max\{k:\tau_{2k}\leqslant n\}$为$\{x_1,\cdots,x_n\}$上穿区间$(a,b)$的次数.

**引理 2.3.1** 设定义 2.3.1 中的 $x_i\in[-\infty,\infty)$，$i=1,\cdots,n$. 对 $i=2,\cdots,n$，令

$$u_i=\begin{cases}1, & \text{对某 } k\geqslant 1,\tau_{2k}<i\leqslant\tau_{2k+1},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{2.3.1}$$

则

$$s=\sum_{i=2}^{n}(u_ix_i-u_ix_{i-1})\tag{2.3.2}$$

总有意义而且

$$s\leqslant(x_n-a)^+-(b-a)U(a,b).\tag{2.3.3}$$

**证明** 对某 $i=2,\cdots,n$，如 $u_i=0$，则 $u_ix_i-u_ix_{i-1}=0$. 对某 $i=2,\cdots,n$，如 $u_i=1$，则可区分为两种情况：(1) 对某 $k\geqslant 1$，$\tau_{2k}<i<\tau_{2k+1}$，这时必有 $-\infty<a<x_{i-1}$，$x_i<\infty$ 从而 $u_ix_i-u_ix_{i-1}=u_i(x_i-x_{i-1})$是一实数；(2) 对某 $k\geqslant 1$，$\tau_{2k}<i=\tau_{2k+1}$，这时 $-\infty\leqslant x_i\leqslant a<x_{i-1}<\infty$ 从而 $-\infty\leqslant u_ix_i-u_ix_{i-1}=u_i(x_i-x_{i-1})<\infty$. 因此(2.3.2)之右端总有意义且可表

$$s=\sum_{i=2}^{n}u_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{\{i:2\leqslant i\leqslant n,u_i=1\}}(x_i-x_{i-1}).\tag{2.3.4}$$

简记 $U(a,b)=U$. 如 $\tau_{2U+1}\leqslant n$，由(2.3.4)得

$$\begin{aligned}s&=\sum_{k=1}^{U}\sum_{i=\tau_{2k}+1}^{\tau_{2k+1}}(x_i-x_{i-1})=\sum_{k=1}^{U}(x_{\tau_{2k+1}}-x_{\tau_{2k}})\\&\leqslant\sum_{k=1}^{U}(a-b)=-(b-a)U.\end{aligned}$$

如 $\tau_{2U+1}=n+1$，由(2.3.4)得

$$
\begin{aligned}
s &= \sum_{k=1}^{U-1}\sum_{i=\tau_{2k}+1}^{\tau_{2k+1}}(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=\tau_{2U}+1}^{n}(x_i-x_{x-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{U-1}(x_{\tau_{2k+1}}-x_{\tau_{2k}})+x_n-x_{\tau_{2U}} \\
&\leqslant (U-1)(a-b)+x_n-b \\
&= (x_n-a)-(b-a)U \\
&\leqslant (x_n-a)^+-(b-a)U.
\end{aligned}
$$

因此，(2.3.3)成立. 证完.

**引理 2.3.2** 设$\{S_k,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$是适可测函数列. 以$\{\tau_k,k\geqslant1\}$和 $U(a,b)$分别记$\{S_1,\cdots,S_n\}$对区间$(a,b)$的穿时序列和上穿次数，则对每 $k\geqslant1$，$\tau_k$ 是停时；$U(a,b)$关于 $\mathscr{F}_n$ 可测.

**证明** 对 $i=1,\cdots,n$ 有

$$
\{\tau_1=i\}=\{S_1>a,\cdots,S_{i-1}>a,S_i\leqslant a\}\in\mathscr{F}_i,
$$

故 $\tau_1$ 是停时. 如对某 $k\geqslant1$，$\tau_{2k-1}$是停时，则对每 $i=1,\cdots,n$，有

$$
\begin{aligned}
\{\tau_{2k}=i\} &= \bigcup_{j=1}^{i-1}\{\tau_{2k-1}=j,\tau_{2k}=i\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{i-1}\{\tau_{2k-1}=j,S_{j+1}<b,\cdots,S_{i-1}<b,S_i\geqslant b\}\in\mathscr{F}_i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\tau_{2k+1}=i\} &= \bigcup_{j=1}^{i-1}\{\tau_{2k}=j,\tau_{2k+1}=i\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{i-1}\{\tau_{2k}=j,S_{j+1}>a,\cdots,S_{i-1}>a,S_i\leqslant a\}\in\mathscr{F}_i,
\end{aligned}
$$

故 $\tau_{2k}$，$\tau_{2k+1}$都是停时. 于是由归纳法知对每 $k\geqslant1$，$\tau_k$ 是停时. 此外，

$$
\{U(a,b)=k\}=\bigcap_{i=k+1}^{\infty}\{\tau_{2k}\leqslant n,\tau_{2i}>n\}\in\mathscr{F}_n
$$

对一切 $k\geqslant0$(约定 $\tau_0=1$)成立，故 $U(a,b)$关于 $\mathscr{F}_n$ 可测. 证完.

下面的定理给出的不等式称为下鞅的上穿不等式. 它是证明

下鞅基本收敛定理的重要工具.

**定理 2.3.3** 设$\{S_k,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$是下鞅,$a<b$是给定实数. 以$U(a,b)$记$\{S_1,\cdots,S_n\}$上穿$(a,b)$的次数,则

$$EU(a,b)\leqslant E(S_n-a)^+/(b-a). \tag{2.3.5}$$

**证明** 无妨设$E(S_n-a)^+<\infty$. 由系 2.1.6 和命题 2.1.2 知,对每$i=1,\cdots,n$均有

$$ES_i^+\leqslant ES_n^+\leqslant E(S_n-a)^++|a|<\infty. \tag{2.3.6}$$

记$\{\tau_k,k\geqslant1\}$为$\{S_1,\cdots,S_n\}$对$(a,b)$的穿时序列并定义$\{u_i,i=2,\cdots,n\}$如(2.3.1). 由引理 2.3.2 易见对每$i=2,\cdots,n$,

$$\{u_i=1\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\tau_{2k}<i\leqslant\tau_{2k+1}\}\in\mathscr{F}_{i-1}. \tag{2.3.7}$$

由(2.3.6)知对每$i=1,\cdots,n$, $-\infty\leqslant S_i<\infty$ a.s.. 故

$$s=\sum_{i=1}^{n}(u_iS_i-u_iS_{i-1})$$

a.s.有意义. 又由$u_i$的定义知对每$i=2,\cdots,n$

$$a<S_{i-1}<\infty\quad \text{a.s.}\ \{u_i=1\}$$

从而(2.3.6)给出

$$E|u_iS_{i-1}|=E|S_{i-1}|I_{\{u_i=1\}}\leqslant ES_{i-1}^++|a|<\infty.$$

故由(2.3.7)和下鞅的性质得

$$\begin{aligned}Es=&\sum_{i=2}^{n}E(u_iS_i-u_iS_{i-1})\\=&\sum_{i=2}^{n}(Eu_iS_i-Eu_iS_{i-1})\\=&\sum_{i=2}^{n}\{E[u_iE(S_i|\mathscr{F}_{i-1})]-Eu_iS_{i-1}\}\geqslant0.\end{aligned}$$

这样,从(2.3.3)就得到

$$E(S_n-a)^+-(b-a)EU(a,b)\geqslant Es\geqslant0,$$

即(2.3.5)成立. 证完.

我们将称下列定理为下鞅基本收敛定理.

**定理 2.3.4** 如果下鞅$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$满足

$$\sup_{n\geqslant 1} ES_n^+ < \infty, \tag{2.3.8}$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ a.s. 有意义;记 $S_\infty=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ a.s. ,则

(1) $ES_\infty^+<\infty$;

(2) $|S_\infty|<\infty$ a.s. $\{S_1>-\infty\}$;

(3) 如对每 $n\geqslant 1$,$S_n\in L_1$,则 $S_\infty\in L_1$.

**证明** 以 $\Gamma$ 记 $\boldsymbol{R}$ 中有理数集. 对每 $r_1,r_2\in\Gamma$,$r_1<r_2$,以 $U_n(r_1,r_2)$记$\{S_1,\cdots,S_n\}$上穿$(r_1,r_2)$的次数. 由于 $U_n(r_1,r_2)$对 $n$ 非降,故由(2.3.5)和(2.3.8)知

$$\begin{aligned}
E\lim_{n\to\infty} U_n(r_1,r_2) &= \lim_{n\to\infty} EU_n(r_1,r_2)\\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty} E(S_n-r_1)^+/(r_2-r_1)\\
&\leqslant (\liminf_{n\to\infty} ES_n^+ + |r_1|)/(r_2-r_1)\\
&\leqslant (\sup_{n\geqslant 1} ES_n^+ + |r_1|)/(r_2-r_1) < \infty,
\end{aligned}$$

从而

$$P(\lim_{n\to\infty} U_n(r_1,r_2)=\infty)=0$$

对每 $r_1,r_2\in\Gamma$,$r_1<r_2$ 成立. 因此我们有

$$\begin{aligned}
&P(\liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n)\\
&\quad = P\Big(\bigcup_{\substack{r_1,r_2\in\Gamma\\ r_1<r_2}} \{\liminf_{n\to\infty} S_n < r_1 < r_2 < \limsup_{n\to\infty} S_n\}\Big)\\
&\quad \leqslant \sum_{\substack{r_1,r_2\in\Gamma\\ r_1<r_2}} P(\liminf_{n\to\infty} S_n < r_1 < r_2 < \limsup_{n\to\infty} S_n)\\
&\quad \leqslant \sum_{\substack{r_1,r_2\in\Gamma\\ r_1<r_2}} P(\lim_{n\to\infty} U_n(r_1,r_2)=\infty) = 0.
\end{aligned}$$

这说明$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ a.s. 有意义.

设对每$n\geqslant 1$，$S_n\in L_1$. 由 Fatou 引理、命题 2.1.2 以及(2.3.8)推知

$$E|S_\infty|\leqslant \liminf_{n\to\infty} E|S_n| = \liminf_{n\to\infty}(2ES_n^+ - ES_n)$$

$$\leqslant \liminf_{n\to\infty}(2ES_n^+ - ES_1)\leqslant 2\sup_{n\geqslant 1}ES_n^+ - ES_1 < \infty,$$

可见定理之结论(3)成立. 把结论(3)用于下鞅$\{S_n^+,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$并注意$S_n^+\to S_\infty^+$ a.s.，又得$ES_\infty^+<\infty$. 这又证得结论(1). 于是只要再证结论(2). 对每$k\geqslant 1$，令$S_n^{(k)}=S_nI_{\{S_1>-k\}}$，$n\geqslant 1$，则$\{S_n^{(k)},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$还是下鞅列并且对每$n\geqslant 1$，

$$E|S_n^{(k)}| = E|S_n|I_{\{S_1>-k\}}$$

$$= 2ES_n^+I_{\{S_1>-k\}} - ES_nI_{\{S_1>-k\}}$$

$$\leqslant 2ES_n^+I_{\{S_1>-k\}} - ES_1I_{\{S_1>-k\}}$$

$$\leqslant 2\sup_{n\geqslant 1}ES_n^+ + k < \infty.$$

把结论(3)用于下鞅$\{S_n^{(k)},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$并注意$S_n^{(k)}\to S_\infty^{(k)} := S_\infty I_{\{S_1>-k\}}$ a.s.，便得$E|S_\infty^{(k)}|<\infty$从而

$$|S_\infty| < \infty \quad \text{a.s.}\ \{S_1 > -k\}$$

对每$k\geqslant 1$成立. 据命题 2.2.8 之(4)，就证出了(2). 证完.

## 3.2 一致可积鞅

对于一个适可测函数列$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ a.s. 存在，那么记$S_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，$S_\infty$是关于$\mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right)$可测的. 于是，$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$(即在原序列$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$上再加上一个最右边的元$(S_\infty,\mathscr{F}_\infty)$)仍成为适的. 定理 2.3.5 表明，在(2.3.8)的条件下，由下鞅列$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$可得到一个有“最右边”元的适可测函数列$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$. 现在我们关心的是，在什么条件下，$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$还是一个下鞅?

**定理 2.3.5** 对下鞅$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$而言,下列四个命题等价:

(1) 存在可测函数 $S$ 使 $S^+\in L_1$ 且对每 $n\geqslant 1$,

$$E(S|\mathscr{F}_n)\geqslant S_n \quad \text{a.s.};$$

(2) $\{S_n^+,n\geqslant 1\}$一致可积;

(3) $\{S_n^+,n\geqslant 1\}$是 $L_1$ 的基本列;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ a.s. 有意义,记为 $S_\infty$,此 $S_\infty^+\in L_1$ 且$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$是一个下鞅.

**证明** 我们采用这样的路线来证明:

$$(1)\Rightarrow(2)\Leftrightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1).$$

兹实现如下.

(1)⇒(2):由于对每 $n\geqslant 1$,$E(S|\mathscr{F}_n)\geqslant S_n$ a.s.,故

$$E(S^+|\mathscr{F}_n)\geqslant E^+(S|\mathscr{F}_n)\geqslant S_n^+ \quad \text{a.s.}. \tag{2.3.9}$$

于是,对每 $\lambda>0$,

$$P(S_n^+>\lambda)\leqslant ES_n^+/\lambda\leqslant ES^+/\lambda,\quad n\geqslant 1.$$

这说明当 $\lambda\to\infty$时,$P(S_n^+>\lambda)\to 0$ 对 $n\geqslant 1$ 一致成立.再次利用(2.3.9)便得

$$\sup_{n\geqslant 1}ES_n^+I_{\{S_n^+>\lambda\}}\leqslant\sup_{n\geqslant 1}ES^+I_{\{S_n^+>\lambda\}}\to 0$$

当 $n\to\infty$时成立.可见$\{S_n^+,n\geqslant 1\}$一致可积.

(2)⇔(3):如果(2)成立,由定理 1.1.9 知(2.3.8)必成立.如果(3)成立,(2.3.8)也必须成立.因此,在这两种情况下都存在 $S_\infty$ 使 $S_\infty^+\in L_1$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_\infty$ a.s.(定理 2.3.4).于是由定理 1.1.10 即知(2)和(3)等价.

(2),(3)⇒(4):如前所述,当(2)或(3)成立时,存在 $S_\infty$,使$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_\infty$ a.s. 且 $S_\infty^+\in L_1$.因此只需要证$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$是一个下鞅.

对每 $k\geqslant 1$,令

$$S_n^{(k)} = S_n \vee (-k), \quad n \geqslant 1,$$

由命题 2.1.4 知$\{S_n^{(k)}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是一个下鞅. 于是,对每 $k \geqslant 1$,每 $m \geqslant n \geqslant 1$ 和每 $A \in \mathscr{F}_n$,有

$$ES_m^{(k)} I_A \geqslant ES_n^{(k)} I_A.$$

上式中令 $m \to \infty$,注意对每 $m \geqslant 1$, $-k \leqslant S_m^{(k)} \leqslant S_m^+$ 而且$\{S_m^+, m \geqslant 1\}$是一致可积的,又注意

$$\lim_{n \to \infty} S_n^{(k)} = S_\infty^{(k)} := S_\infty \vee (-k) \quad \text{a.s.},$$

由定理 1.1.10 即得对每 $n \geqslant 1$,每 $A \in \mathscr{F}_n$,

$$ES_\infty^{(k)} I_A = \lim_{m \to \infty} ES_m^{(k)} I_A \geqslant ES_n^{(k)} I_A.$$

这表明对每 $k \geqslant 1$,每 $n \geqslant 1$,

$$E(S_\infty^{(k)} | \mathscr{F}_n) \geqslant S_n^{(k)} \quad \text{a.s.}. \tag{2.3.10}$$

注意 $S_\infty^+ - S_\infty^{(k)} \uparrow S_\infty^+ - S_\infty$,由条件单调收敛定理知对每 $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to \infty} \left[ E(S_\infty^+ | \mathscr{F}_n) - E(S_\infty^{(k)} | \mathscr{F}_n) \right] \\
&\quad = \lim_{k \to \infty} E(S_\infty^+ - S_\infty^{(k)} | \mathscr{F}_n) \\
&\quad = E(S_\infty^+ - S_\infty | \mathscr{F}_n) \\
&\quad = E(S_\infty^+ | \mathscr{F}_n) - E(S_\infty | \mathscr{F}_n) \quad \text{a.s.},
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{k \to \infty} E(S_\infty^{(k)} | \mathscr{F}_n) = E(S_\infty | \mathscr{F}_n) \quad \text{a.s.}.$$

故在(2.3.10)中令 $k \to \infty$,即得

$$E(S_\infty | \mathscr{F}_n) \geqslant S_n \quad \text{a.s.}, \quad n \geqslant 1.$$

可见$\{S_n, \mathscr{F}_n, 1 \leqslant n \leqslant \infty\}$是一个下鞅.

(4)⇒(1):取 $S = S_\infty$即可. 定理证完.

我们进而讨论,当一个鞅列$\{S_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$的$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ a.s. 存在且记为 $S_\infty$时,在什么条件下,$\{S_n, \mathscr{F}_n, 1 \leqslant n \leqslant \infty\}$还是鞅?

**定理 2.3.6** 对于一个鞅$\{S_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$,下列四种说法等价:

(1) 存在一个 r.v. $S\in L_1$ 使对每 $n\geqslant 1$,

$$E(S|\mathscr{F}_n)=S_n \quad \text{a.s.};$$

(2) $\{S_n,n\geqslant 1\}$一致可积;

(3) $\{S_n,n\geqslant 1\}$是 $L_1$ 中的基本列;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S_\infty\in L_1$ a.s. 而且$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$形成一个鞅.

**证明** 当$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是鞅时,$\{\pm S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$都是下鞅. 又注意(1)意味着存在可测函数 $S$,满足$(\pm S)^+=S^\pm\in L_1$,使对每 $n\geqslant 1$,$E(\pm S|\mathscr{F}_n)=\pm S_n$ a.s.. 故由定理 2.3.5 知(1)蕴含$\{S_n^\mp,n\geqslant 1\}$一致可积. 可见(1)⇒(2). 与定理 2.3.5 同样的方法可证(2)⇔(3). 由于(2)意味着$\{(\pm S_n)^+,n\geqslant 1\}$一致可积,故由定理 2.3.5 又知当 $n\to\infty$时,$S_n$ a.s. 收敛到某 $S_\infty$,这个 $S_\infty$满足 $S_\infty^\pm=(\pm S_\infty)^+\in L_1$ 即 $S_\infty\in L_1$ 且使$\{\pm S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$成为下鞅即$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$成为鞅. 这又证明了(2)⇒(4). 最后,(4)⇒(1)是显然的. 于是我们有

$$(1)\Rightarrow(2)\Leftrightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1).$$

定理证完.

在本章 1.3 小节的例(1)中令 $T=\{1,2,\cdots\}$,我们得到了一个由一个可测函数 $S$ 和一个非降 $\sigma$ 域列$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$产生的鞅列. 定理 2.3.5 的深刻意义在于说明任一一致可积鞅列均具有 1.3 中例(1)的那种形式. 文献中常把这种形式的鞅称为有右闭元的鞅. 下面我们证明,一致可积下鞅列总可以表为一个右闭的鞅加上一个位势.

**系 2.3.7** 对于下鞅$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$而言,下列四个说法等价:

(1) $\{S_n,n\geqslant 1\}$一致可积;

(2) $\{S_n,n\geqslant 1\}$是 $L_1$ 基本列;

(3) 当 $n\to\infty$时 $S_n$ a.s. 收敛到某 $S_\infty\in L_1$ 使得$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n$

$\leqslant\infty\}$是 $L_1$ 下鞅且

$$\lim_{n\to\infty} ES_n = ES_\infty;$$

(4) 存在一个 $M\in L_1$ 和一个位势$\{\pi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$使对每 $n\geqslant 1$,有

$$S_n = E(M|\mathscr{F}_n) - \pi_n \quad \text{a.s.}.$$

**证明** 采用下列路线证之：

$$(1)\Leftrightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1).$$

(1)⇔(2)：在(1)和(2)之下均有 $\sup_{n\geqslant1}E|S_n|<\infty$,因而由定理 2.3.5 知这两种情况下当 $n\to\infty$时,$S_n$ 均 a.s. 收敛到某 $S_\infty\in L_1$. 再引用定理 1.1.10 即知(1)和(2)等价.

(1),(2)⇒(3)：如(1)成立,由定理 2.3.5 知当 $n\to\infty$时 $S_n$ a.s. 收敛到某 $S_\infty\in L_1$,使$\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$成为下鞅. 由(2)又知 $S_n\xrightarrow{L_1}S_\infty$,从而更有 $ES_n\to ES_\infty$. 故(3)成立.

(3)⇒(4)：取 $M=S_\infty$. 对每 $n\geqslant1$,令 $\pi_n=E(M|\mathscr{F}_n)-S_n$. 当(3)成立时,我们有

$$\pi_n = E(M|\mathscr{F}_n) - S_n = E(S_\infty|\mathscr{F}_n) - S_n \geqslant 0 \quad \text{a.s.};$$

$$E\pi_n = EM - ES_n = ES_\infty - ES_n \to 0;$$

$$E(\pi_{n+1}|\mathscr{F}_n) = E(M|\mathscr{F}_n) - E(S_{n+1}|\mathscr{F}_n) \leqslant \pi_n \quad \text{a.s.}.$$

这说明$\{\pi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是一个位势,故(4)成立.

(4)⇒(1)：$\{E(M|\mathscr{F}_n),n\geqslant1\}$显然一致可积,又$\{\pi_n,n\geqslant1\}$一致可积(习题 1.1 之 6),故$\{S_n=E(M|\mathscr{F}_n)-\pi_n,n\geqslant1\}$一致可积. 证完.

### 3.3 停时定理的推广

以往讨论鞅或下鞅$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$的停时定理时,一个必要的假定是停时必须是 a.s. 有限的. 否则,诸如 $S_\tau$ 这样的符号将可能在一个正测集上无意义. 对于一致可积的鞅或下鞅,总存在一个

$S_\infty$ 使 $\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$ 仍是鞅或下鞅. 这样, $S_\tau$ 在 $\{\tau=\infty\}$ 上的定义就不会有困难了. 我们自然期望这时停时定理中的"停时有限"条件可以去掉. 这一小节就讨论上述问题.

**定理 2.3.8** 设 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是一致可积鞅, 记 $S_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, 则对 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 的任意二停时 $\tau,\sigma$, 总有(2.2.8).

**证明** 据定理 2.3.6, 此时 $\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$ 是一个 $L_1$ 鞅, 因而对每 $A\in\mathscr{F}_\tau$, 有

$$
\begin{aligned}
ES_\sigma I_{\{\sigma\geqslant\tau\}\cap A} &= \sum_{n=1}^{\infty}ES_nI_{\{\sigma=n\geqslant\tau\}\cap A}+ES_\infty I_{\{\sigma=\infty\}\cap A}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}ES_\infty I_{\{\sigma=n\geqslant\tau\}\cap A}+ES_\infty I_{\{\sigma=\infty\}\cap A}\\
&= ES_\infty I_{\{\sigma\geqslant\tau\}\cap A};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ES_\tau I_{\{\sigma\geqslant\tau\}\cap A} &= \sum_{n=1}^{\infty}ES_nI_{\{\sigma\geqslant n=\tau\}\cap A}+ES_\infty I_{\{\sigma=\tau=\infty\}\cap A}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}ES_\infty I_{\{\sigma\geqslant n=\tau\}\cap A}+ES_\infty I_{\{\sigma=\tau=\infty\}\cap A}\\
&= ES_\infty I_{\{\sigma\geqslant\tau\}\cap A},
\end{aligned}
$$

因此, 注意 $\{\sigma\geqslant\tau\}\in\mathscr{F}_\tau$, 便得

$$E(S_\sigma|\mathscr{F}_\tau)I_{\{\sigma\geqslant\tau\}}=E(S_\sigma I_{\{\sigma\geqslant\tau\}}|\mathscr{F}_\tau)=S_\tau I_{\{\sigma\geqslant\tau\}}\quad \text{a.s.}$$

即(2.2.8)成立. 证完.

**定理 2.3.9** 设 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是一致可积下鞅, 记 $S_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ a.s., 则对 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 的任意二停时 $\sigma$ 和 $\tau$, 总有(2.2.7).

**证明** 这时系 2.3.7 之(4)成立. 由于 $\{\pi_n,n\geqslant1\}$ 一致可积, 对下鞅 $\{-\pi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 再用系 2.3.7 又可见, 此时若记 $\pi_\infty=0$, 则 $\{\pi_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$ 仍是一个上鞅. 因而对每 $A\in\mathscr{F}_\tau$, 有

$$
\begin{aligned}
E\pi_\sigma I_{\{\sigma\geqslant\tau\}} = E\pi_\sigma I_{\{\tau\leqslant\sigma<\infty\}\cap A} &= \lim_{k\to\infty}E\pi_\sigma I_{\{\tau\leqslant\sigma\leqslant k\}\cap A}\\
&= \lim_{k\to\infty}E\pi_{\sigma\wedge k}I_{\{\tau\leqslant\sigma\leqslant k\}\cap A}\leqslant\liminf_{k\to\infty}E\pi_{\sigma\wedge k}I_{\{\tau\leqslant\sigma\wedge k\}\cap A}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \liminf_{k\to\infty} E\pi_\tau I_{\{\tau\leqslant\sigma\wedge k\}\cap A} = E\pi_\tau I_{\{\sigma\geqslant\tau\}\cap A},$$

这里,第二个不等号是对下鞅$\{-\pi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$和有界停时$\sigma\wedge k$用系 2.2.10 而得到的.上式表明

(2.3.11) $$E(\pi_\sigma|\mathscr{F}_\tau)\leqslant\pi_\tau \quad \text{a.s. } \{\sigma\geqslant\tau\}.$$

又对系 2.3.7,(4)中之$M\in L_1$,记$M_n=E(M|\mathscr{F}_n),n\geqslant 1$.则$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一致可积鞅.因此由定理 2.3.8 知:记$M_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}M_n$,则

(2.3.12) $$E(M_\sigma|\mathscr{F}_\tau)=M_\tau \quad \text{a.s. } \{\sigma\geqslant\tau\}$$

成立.注意由系 2.3.7,(4)之分解式和$\pi_\infty=0$推知

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}M_n-\lim_{n\to\infty}\pi_n=M_\infty-\pi_\infty=M_\infty \quad \text{a.s.},$$

把(2.3.12)减去(2.3.11),就得(2.2.7).证完.

## 3.4 反鞅

反(下,上)鞅是指时间顺序上"反"过来的(下,上)鞅.设$T\subset\boldsymbol{R}$.

**定义 2.3.2** 设$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非增子$\sigma$域族,即对每$t_1,t_2\in T$,$t_1<t_2$均有$\mathscr{F}_{t_2}\subset\mathscr{F}_{t_1}$.二元族$\{S_t,\mathscr{F}_t,t\in T\}$称为一个反(下、上)鞅,如果对每$t\in T$,$S_t$关于$\mathscr{F}_t$可测,对每$t_1,t_2\in T$.$t_1<t_2$,$E(S_{t_1}|\mathscr{F}_{t_2})$有意义而且下式成立:

(2.3.13) $$E(S_{t_1}|\mathscr{F}_{t_2})(\geqslant,\leqslant)=S_{t_2} \quad \text{a.s.}.$$

关于反下鞅,我们有下列基本收敛定理.

**定理 2.3.10** 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是反鞅.如果

(2.3.14) $$ES_1^+<\infty,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ a.s.有意义;此时记$S_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$,则$ES_\infty^\pm<\infty$.又下列说法等价:

(1) $\{S_n,n\geqslant 1\}$一致可积;

(2) $\{S_n,n\geqslant 1\}$是$L_1$基本列;

(3) $\lim_{n\to\infty} S_n$ a. s. 存在，使$\{S_n, \mathscr{F}_n, 1\leqslant n\leqslant\infty\}$成为 $L_1$ 中的反下鞅，其中 $S_\infty=\lim_{n\to\infty} S_n$ a. s. ，$\mathscr{F}_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$；

(4) $ES_1^+<\infty, \liminf_{n\to\infty} ES_n>-\infty$.

**证明**　对每 $n\geqslant 1$，以 $U_n(a,b)$记$\{S_n, S_{n-1}, \cdots, S_1\}$上穿区间$(a,b)$的次数. 由于$\{S_n, \mathscr{F}_n; S_{n-1}, \mathscr{F}_{n-1}; \cdots; S_1, \mathscr{F}_1\}$是一个下鞅，故对它可用上穿不等式(2. 3. 5)而由(2. 3. 14)得

$$
\begin{aligned}
EU_n(a,b) &\leqslant E(S_1-a)^+/(b-a) \\
&\leqslant (ES_1^+ + |a|)/(b-a)<\infty, \quad n\geqslant 1.
\end{aligned}
$$

因此，$E\lim_{n\to\infty} U_n(a,b)=\lim_{n\to\infty} EU_n(a,b)<\infty$，并进而得

$$\lim_{n\to\infty} U_n(a,b)<\infty \quad \text{a.s.}.$$

与定理 2. 3. 4 的证明同理，由上式可推知$\lim_{n\to\infty} S_n$ a. s. 有意义. 不难见，$\{S_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是反下鞅当且仅当对每 $n\geqslant 1$，

$$E(S_n|\mathscr{F}_{n+1})\geqslant S_{n+1} \quad \text{a.s.}. \tag{2.3.15}$$

由此可见，

$$E(S_n^+|\mathscr{F}_{n+1})\geqslant E^+(S_n|\mathscr{F}_{n+1})\geqslant S_{n+1}^+ \quad \text{a.s.}, \quad n\geqslant 1.$$

上式两端取期望又有

$$ES_n^+\geqslant ES_{n+1}^+, \quad n\geqslant 1. \tag{2.3.16}$$

于是由 Fatou 引理知

$$ES_\infty^+=E\lim_{n\to\infty} S_n^+\leqslant\liminf_{n\to\infty} ES_n^+\leqslant ES_1^+<\infty.$$

这又证明了 $S_\infty^+\in L_1$.

下面证明(1)—(4)的等价性. (1)⇒(2)的证明类似于系 2. 3. 7. 往证(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1).

(2)⇒(3)：由(2. 3. 15)知对每 $A\in\mathscr{F}_\infty\subset\mathscr{F}_{n+p}\subset\mathscr{F}_n (n\geqslant 1, p\geqslant 1)$均有

$$ES_nI_A\geqslant ES_{n+p}I_A.$$

上式令 $p\to\infty$，立得 $ES_nI_A\geqslant ES_\infty I_A$. 这表明

$$E(S_n|\mathscr{F}_\infty)\geqslant S_\infty\quad \text{a.s.},\quad n\geqslant 1.$$

故(3)成立.

(3)⇒(4)：易.

(4)⇒(1)：在(2.3.15)两端取 $E$，得 $ES_n\geqslant ES_{n+1}$，$n\geqslant 1$. 可见(4)蕴含

$$\lim_{n\to\infty}ES_n=\liminf_{n\to\infty}ES_n>-\infty.$$

此式加上(2.3.16)又得

$$E|S_n|=2ES_n^+-ES_n\leqslant 2ES_1^+-\lim_{n\to\infty}ES_n<\infty,\quad n\geqslant 1,$$

亦即

$$\sup_{n\geqslant 1}E|S_n|<\infty. \tag{2.3.17}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}ES_n$ 是一有限实数. 对任给 $\varepsilon>0$，取定 $n_0\geqslant 1$ 使当 $n>n_0$ 时 $ES_{n_0}-ES_n<\varepsilon$，则由反下鞅性质知

$$\begin{aligned}-ES_nI_{\{S_n<-\lambda\}}&=-ES_n+ES_nI_{\{S_n\geqslant-\lambda\}}\\&\leqslant-ES_n+ES_{n_0}I_{\{S_n\geqslant-\lambda\}}\\&=ES_{n_0}-ES_n-ES_{n_0}I_{\{S_n<-\lambda\}}\\&<\varepsilon-ES_{n_0}I_{\{S_n<-\lambda\}}\end{aligned}$$

对每 $\lambda>0$ 和每 $n>n_0$ 成立. 于是

$$\begin{aligned}&\sup_{n\geqslant 1}E|S_n|I_{\{|S_n|>\lambda\}}\\&\leqslant\sup_{n\geqslant 1}ES_nI_{\{S_n>\lambda\}}+\sup_{n\geqslant 1}[-ES_nI_{\{S_n<-\lambda\}}]\\&\leqslant\sup_{n\geqslant 1}ES_1I_{\{S_n>\lambda\}}+\sup_{1\leqslant n\leqslant n_0}[-ES_nI_{\{S_n<-\lambda\}}]\\&\quad+\sup_{n>n_0}[-ES_nI_{\{S_n<-\lambda\}}]\\&\leqslant\sup_{n\geqslant 1}E|S_1|I_{\{|S_n|>\lambda\}}+\sup_{1\leqslant n\leqslant n_0}E|S_n|I_{\{|S_n|>\lambda\}}\\&\quad+\varepsilon+\sup_{n>n_0}E|S_{n_0}|I_{\{|S_n|>\lambda\}}\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

对每 $\lambda>0$ 成立. 有限个可积函数是一致可积的,故

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{1\leqslant n\leqslant n_0} E|S_n|I_{\{|S_n|>\lambda\}}=0.$$

同时,(2.3.17)蕴含当 $\lambda\to\infty$ 时

$$\sup_{n\geqslant1}P(|S_n|>\lambda)\leqslant\sup_{n\geqslant1}E|S_n|/\lambda\to0$$

故由可积函数不定积分的绝对连续性又推知

$$\lim_{\lambda\to\infty}E|S_1|I_{\{|S_n|>\lambda\}}=0;$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}E|S_{n_0}|I_{\{|S_n|>\lambda\}}=0.$$

于是在(2.3.18)中令 $\lambda\to\infty$,便得

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geqslant1}E|S_n|I_{\{|S_n|>\lambda\}}\leqslant\varepsilon.$$

上式再令 $\varepsilon\to0$,即知(4)成立. 证完.

如果 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是反上鞅,即么 $\{-S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 形成反下鞅. 因此,定理 2.3.10 也可用于解决反上鞅的收敛问题. 注意到 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是反鞅当且仅当 $\{\pm S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 都是反下鞅,作为定理 2.3.10 的一个推论,还可以得到

**定理 2.3.11** 对于反鞅 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$,下列四个说法等价:

(1) $\{S_n,n\geqslant1\}$ 一致可积;

(2) $\{S_n,n\geqslant1\}$ 是 $L_1$ 基本列;

(3) 当 $n\to\infty$ 时 $S_n$ a.s. 收敛到某 $S_\infty\in L_1$,使 $\{S_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$ 成为 $L_1$ 反鞅;

(4) $E|S_1|<\infty$.

证明请读者完成.

### 3.5 Doob 关于条件期望的收敛定理

作为定理 2.3.6 和定理 2.3.11 的推论,我们可得到两个关于条件期望的非常有用的收敛定理.

**定理 2.3.12** 设 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的非降子

$\sigma$ 域，$\mathscr{F}_{\infty}=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right)$. 则对每 $S\in L_1$，

$$E(S\mid\mathscr{F}_n)\to E(S\mid\mathscr{F}_{\infty})$$

在 a.s. 意义和 $L_1$ 意义下均成立.

**证明** 由于$\{E(S\mid\mathscr{F}_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是一致可积鞅，故由定理 2.3.6 知，存在 $S_{\infty}\in L_1$，使$\{E(S\mid\mathscr{F}_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant1;S_{\infty},\mathscr{F}_{\infty}\}$成为鞅而且当 $n\to\infty$时

$$E(S\mid\mathscr{F}_n)\to S_{\infty} \tag{2.3.19}$$

在 a.s. 和 $L_1$ 意义下成立. 此外，对每 $A\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$，存在一个 $n\geqslant1$ 使 $A\in\mathscr{F}_n$，从而由条件期望的定义和鞅的性质推知

$$ESI_A=E[E(S\mid\mathscr{F}_n)I_A]=ES_{\infty}I_A.$$

由于一切使

$$ESI_A=ES_{\infty}I_A \tag{2.3.20}$$

成立之 $A$ 组成一个单调系，故由定理 1.1.14 知，(2.3.20)对一切 $A\in\mathscr{F}_{\infty}$成立. 这表明

$$S_{\infty}=E(S\mid\mathscr{F}_{\infty})\quad \text{a.s.}.$$

以此代入(2.3.19)即得定理结论. 证完.

**定理 2.3.13** 设$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非增 $\sigma$ 域，记 $\mathscr{F}_{\infty}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$. 则对每 $S\in L_1$，

$$E(S\mid\mathscr{F}_n)\to E(S\mid\mathscr{F}_{\infty})$$

在 a.s. 意义和 $L_1$ 意义下均成立.

**证明** 由于$\{E(S\mid\mathscr{F}_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是一致可积反鞅，故由定理 2.3.11 知存在 $S_{\infty}\in L_1$，使当 $n\to\infty$时

$$E(S\mid\mathscr{F}_n)\to S_{\infty}$$

在 a.s. 意义和 $L_1$ 意义下均成立. 但由反鞅性质知对每 $A\in\mathscr{F}_{\infty}\subset\mathscr{F}_n(n\geqslant1)$，

$$ES_\infty I_A = E[E(S|\mathscr{F}_n)I_A] = ESI_A.$$

故 $S_\infty = E(S|\mathscr{F}_\infty)$ a.s.. 证完.

## 习　题　2.3

1. 证明:如鞅$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$满足

$$\sup_{n\geqslant 1} E|M_n| < \infty,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ 存在;记 $M_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$,则 $M_\infty \in L_1$.

2. 举例说明存在 $L_1$ 鞅$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$使

$$\lim_{n\to\infty} M_n = -\infty \quad \text{a.s.}.$$

提示:考虑独立 r.v. 列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$,

$$P(\xi_1 = 0) = 1;$$

$$P(\xi_n = n^2) = 1/n^2, P(\xi_n = -n^2/(n^2-1)) = 1 - 1/n^2, n > 1.$$

令 $M_n = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i, \mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n), n \geqslant 1.$

3. 设鞅差列$\{\xi_k,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$满足下列条件之一:

(1) $\sum\limits_{k=1}^\infty E|\xi_k|^p < \infty, 1 \leqslant p \leqslant 2;$

(2) $\sum\limits_{k=1}^\infty E(|\xi_k|I_{(|\xi_k|>1)} + \xi_k^2 I_{(|\xi_k|\leqslant 1)}) < \infty.$

证明 $S_n = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k$ 当 $n\to\infty$ 时 a.s. 收敛.

4. 举例说明存在 $L_1$ 鞅$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$,满足

$$\sup_{n\geqslant 1} E|M_n| < \infty,$$

因而 $M_\infty =: \lim\limits_{n\to\infty} M_n \in L_1$,但$\{M_n,\mathscr{F}_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$并不是一个鞅.

提示:令 $\Omega=(0,1]$,$\mathscr{F}=(0,1]\cap\mathscr{R}$,$P$ 是$(0,1]$上的 Lebesgue 测度. 在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上令

$$M_n = -nI_{(0,1/n]}, \quad n \geqslant 1;$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma((0,1/n],(1/n,1/(n-1)],\cdots,(1/2,1]), \quad n \geqslant 1.$$

5. 证明习题 2.1 之题 7 所定义之鞅$\lim\limits_{n\to\infty}M_n$ a.s. 存在并且

$$M_\infty := \lim_{n\to\infty} M_n \in L_1.$$

证明对于该题中的$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$，下式

$$E\prod_{n=1}^{\infty}\xi_n \leqslant \prod_{n=1}^{\infty}E\xi_n$$

总是成立的，但确实有满足该题条件的$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$使 $E\prod\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n <$ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}E\xi_n$.

6. 考察习题 2.1 之题 8 的鞅$\{M_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$. 证明

(1) 把 $\mu$ 对 $P$ 的 Lebesgue 分解记为

$$\mu(A) = \int_A S\mathrm{d}P + \mu(A\cap N), \quad A\in\mathscr{F},$$

其中 $S\in L_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$N\in\mathscr{F}$ 且 $P(N)=0$，则

$$M_n \to S \quad \text{a.s.};$$

(2) $\mu$ 对 $P$ 绝对连续当且仅当$\{M_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的一致可积鞅，这时

$$M_n \to \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P} \quad \text{a.s.};$$

$$M_n \xrightarrow{L_1} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}P}.$$

7. 利用定理 2.3.12 证明如下的 Kolmogorov 强大数律：如$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$i.i.d.，$E|\xi_1|<\infty$，则对 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$，有

$$S_n/n \to E\xi_1 \quad \text{a.s.}.$$

提示：$E(\xi_1|S_k, k\geqslant n) = E(\xi_1|S_n) = S_n/n$ a.s.，又注意$\lim\limits_{n\to\infty}S_n/n$ 关于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\sigma(S_k, k\geqslant n)$ 可测.

8. 设$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$的非降子 $\sigma$ 域列，r.

v. 列$\{S_n, n\geqslant 1\}$满足

$$E\sup_{n\geqslant 1}|S_n| < \infty; S_n \to S \quad \text{a.s.}.$$

试证明

$$E(S_n|\mathscr{F}_n) \to E(S|\mathscr{F}_\infty) \quad \text{a.s.}, n\to\infty;$$

$$E(S_n|\mathscr{F}_n) \xrightarrow{L_1} E(S|\mathscr{F}_\infty), \quad n\to\infty;$$

$$E(S_n|\mathscr{F}_m) \to E(S|\mathscr{F}_\infty) \quad \text{a.s.}, m,n\to\infty.$$

9. 设$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非降$\sigma$域列，$\eta$是关于$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n)$可测的r.v..证明：对每$n\geqslant 1$，存在$\mathscr{F}_n$可测的r.v. $\eta_n$，使

$$\eta_n \to \eta \quad \text{a.s.}.$$

10. 证明定理2.3.11.

11. 设如习题2.1题9，证明：

$$f_n \to f \quad \text{a.s.};$$

$$f_n \xrightarrow{L_1} f.$$

12. 一个r.v.序列$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$称为是可换的，如果对每$n\geqslant 1$，对$(1,\cdots,n)$的每一个重排$(i_1,\cdots,i_n)$，$(\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_n})$与$(\xi_1,\cdots,\xi_n)$有相同之分布. 一个$\boldsymbol{R}^k$上的Borel可测函数$f$称为是对称的，如果对$(1,\cdots,k)$的每一个排列$(i_1,\cdots,i_k)$，有

$$f(x_{i_1},\cdots,x_{i_k}) = f(x_1,\cdots,x_k), \quad (x_1,\cdots,x_k)\in\boldsymbol{R}^k.$$

给定$k\geqslant 1$，给定一个$\boldsymbol{R}^k$中的对称函数$f$和一个可换r.v.序列，称

$$U_n = \frac{\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} f(\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_k})}{\binom{n}{k}}, \quad n\geqslant k$$

为广义$U$统计量. 令

$$\mathscr{F}_n = \sigma(U_n, U_{n+1},\cdots), \quad n\geqslant k.$$

证明：如果 $E|f(\xi_1,\cdots,\xi_k)|<\infty$，则

(1) $\{U_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$是一个反鞅；

(2) $U_n\to E[f(\xi_1,\cdots,\xi_k)|\mathscr{F}_\infty)$ a.s.，其中

$$\mathscr{F}_\infty=\bigcap_{n=k}^{\infty}\mathscr{F}_k;$$

(3) $U_n\xrightarrow{L_1}E[f(\xi_1,\cdots,\xi_k)|\mathscr{F}_\infty]$.

13. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是$L_1(\Omega,\mathscr{F},P)$中的可换 r.v. 列. 证明下列强大数律和平均收敛律：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\to E(\xi_1|\mathscr{F}_\infty)\quad \text{a.s.};$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{L_1}E(\xi_1|\mathscr{F}_\infty),$$

其中 $\mathscr{F}_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n$.

14. 证明独立同分布的 r.v. 列是可换的并利用关于可换 r.v. 列的强大数律证明题 7 所述之 Kolmogorov 强大数律.

## 第四节　鞅的不等式

### 4.1 Doob 不等式

鞅论的应用与若干重要的不等式相联系. 正如鞅可以看作是独立 r.v. 序列部分和的推广一样(本章 1.3 例(4))，关于鞅的不等式也往往是独立和相应不等式的推广. 我们将先证明鞅的有关不等式，然后再给出其独立和的原型. 首先介绍鞅的 Doob 不等式.

**定理 2.4.1**　对非负下鞅$\{S_k,\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$，下列不等式成立：

(2.4.1) $\quad \varepsilon P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon) \leqslant ES_n I_{\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon\}} \leqslant ES_n, \quad \varepsilon > 0;$

如果$\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \in L_p$，则

(2.4.2)
$$\| S_n \|_p \leqslant \| \max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \|_p$$
$$\leqslant \begin{cases} p \| S_n \|_p/(p-1), & p > 1, \\ \mathrm{e}[1 + ES_n(\log S_n)^+]/(\mathrm{e}-1), & p = 1, \end{cases}$$

其中$\|\cdot\|_p$记$L_p$模，log表以e为底的对数.

**证明** 对每$k=1,\cdots,n$，令
$$A_k = \{S_i < \varepsilon, 1 \leqslant i < k; S_k \geqslant \varepsilon\},$$
则诸$A_k$不交，$A_k \in \mathscr{F}_k$且
$$A := \bigcup_{k=1}^n A_k = \{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant \varepsilon\}.$$
因此利用下鞅性质得
$$ES_n \geqslant ES_n I_A = \sum_{k=1}^n ES_n I_{A_k} = \sum_{k=1}^n E[E(S_n|\mathscr{F}_k) I_{A_k}]$$
$$\geqslant \sum_{k=1}^n ES_k I_{A_k} \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^n P(A_k) = \varepsilon P(A).$$
这证明了(2.4.1).

设$p>1$，记$S=\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k$. 由Fubini定理，(2.4.1)式和Hölder不等式得
$$ES^p = pE\int_0^S u^{p-1}\mathrm{d}u = pE\int_0^\infty u^{p-1} I_{\{S\geqslant u\}}\mathrm{d}u$$
$$= p\int_0^\infty u^{p-1} P(S \geqslant u)\mathrm{d}u \leqslant p\int_0^\infty u^{p-2}(ES_n I_{\{S\geqslant u\}})\mathrm{d}u$$
$$= pES_n\int_0^S u^{p-2}\mathrm{d}u = pES_n S^{p-1}/(p-1)$$
$$\leqslant p(ES_n^p)^{1/p}(ES^p)^{1-1/p}/(p-1).$$
当$ES^p=0$时，(2.4.2)显然成立；当$ES^p>0$时，上式两端同除以$(ES^p)^{1-1/p}$即得(2.4.2)的$p>1$部分.

设 $p=1$. 不难见对任 $a\geqslant 0, b>0$ 有

$$a(\log b)^{+}\leqslant a(\log a)^{+}+b/\mathrm{e}.$$

于是当 $ES>0$ 时由 Fubini 定理，(2.4.1)及上式得

$$\begin{aligned} ES-1 &\leqslant E(S-1)^{+}=\int_{0}^{\infty}P(S-1\geqslant u)\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_{0}^{\infty}[ES_{n}I_{\{S\geqslant 1+u\}}/(1+u)]\mathrm{d}u \\ &= ES_{n}(\log S)^{+}\leqslant ES_{n}(\log S_{n})^{+}+ES/\mathrm{e}, \end{aligned}$$

从而(2.4.2)对 $p=1$ 的部分成立. 又当 $ES=0$ 时，(2.4.2)对 $p=1$ 的部分显然成立. 定理证完.

不等式(2.4.1)以下述关于独立和的 Kolmogorov 不等式为其特例. 确切地说，它是 Kolmogorov 不等式的推广.

**系 2.4.2** 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立 r.v.，对每 $k=1,\cdots,n$, $E\xi_k=0$, $E\xi_k^2=\sigma_k^2$，又记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i$，则对任 $\varepsilon>0$,

$$(2.4.3)\qquad P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2/\varepsilon^2.$$

**证明** 对每 $k=1,\cdots,n$，令 $\mathscr{F}_k=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_k)$. 则 $\{S_k,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$ 是鞅(本章 1.3 例(4))，从而 $\{S_k^2,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$ 是下鞅(系 2.1.6). 对此非负下鞅用(2.4.1)即得(2.4.3). 证完.

顺便说一下，在(2.4.3)中令 $n=1$，就得到熟知的 Chebyshev 不等式. 因此 Kolmogorov 不等式自身亦可看作 Chebyshev 不等式的推广.

### 4.2 Burkholder 不等式

关于独立 r.v. 的部分和与平方和的 $p\geqslant 1$ 阶矩之间有一个重要的不等式——Marcinkiewicz-Zygmund 不等式(简称为 M-Z 不等式). 当 $p>1$ 时，M-Z 不等式对鞅的推广就是 Burkholder 不等式.

**引理 2.4.3** 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是非负下鞅;$\tau$是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的停时.则

(2.4.4)
$$ES_\tau I_{\{\tau<\infty\}}\leqslant\sup_{n\geqslant 1}ES_n;$$

如果

(2.4.5)
$$\sup_{n\geqslant 1}ES_n<\infty,$$

则当$n\to\infty$时$S_n$ a.s. 收敛到某$S_\infty\in L_1$,使

(2.4.6)
$$ES_\tau\leqslant\sup_{n\geqslant 1}ES_n.$$

**证明** 对下鞅$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$和停时$\sigma=n$用系 2.2.10,我们得

$$E(S_nI_{\{\tau\leqslant n\}}|\mathscr{F}_\tau)\geqslant S_\tau I_{\{\tau\leqslant n\}}\quad\text{a.s.}.$$

上式两端取$E$,又有

$$ES_nI_{\{\tau\leqslant n\}}\geqslant ES_\tau I_{\{\tau\leqslant n\}},\quad n\geqslant 1.$$

由此可见

(2.4.7)
$$\begin{aligned}ES_\tau I_{\{\tau<\infty\}}&=E\lim_{n\to\infty}ES_\tau I_{\{\tau\leqslant n\}}\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}ES_nI_{\{\tau\leqslant\infty\}}\leqslant\sup_{n\geqslant 1}ES_n,\end{aligned}$$

即(2.4.4).如(2.4.5)满足,由定理 2.3.4 知对某$S_\infty\in L_1$,$\lim_{n\to\infty}ES_n=S_\infty$ a.s.,因而

$$\begin{aligned}ES_\tau I_{\{\tau=\infty\}}=ES_\infty I_{\{\tau=\infty\}}&=E\lim_{n\to\infty}S_nI_{\{\tau=\infty\}}\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}ES_nI_{\{\tau=\infty\}}.\end{aligned}$$

上式与(2.4.7)一起,推得

$$\begin{aligned}ES_\tau&=ES_\tau I_{\{\tau<\infty\}}+ES_\tau I_{\{\tau=\infty\}}\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}ES_nI_{\{\tau<\infty\}}-\liminf_{n\to\infty}ES_nI_{\{\tau=\infty\}}\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}ES_n\leqslant\sup_{n\geqslant 1}ES_n,\end{aligned}$$

即(2.4.6).证完.

**引理 2.4.4** 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是符合条件(2.4.5)的非负下

鞅，$\{\xi_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$记对应的下鞅差列. 对 $C>0$，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant 1:S_n>C\}$$

并约定 $\inf\varnothing=\infty$，则

$$E\sum_{k=1}^{\tau-1}\xi_k^2+ES_{\tau-1}^2\leqslant 2ES_{\tau-1}S_\tau\leqslant 2C\sup_{n\geqslant 1}ES_n. \tag{2.4.8}$$

这里以及今后都约定，不论求和号 $\sum_{k=i}^{j}$ 下的内容如何，当 $j<i$ 时其值为 0.

**证明** 对任 $a_k\in\boldsymbol{R},k=1,\cdots,n$，记 $A_j=\sum_{k=1}^{j}a_k,j=1,\cdots,n$. 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}a_k^2+A_{n-1}^2&=A_{n-1}^2-2\sum_{1\leqslant i<j<n}a_ia_j+A_{n-1}^2\\&=2A_{n-1}^2-2\sum_{j=1}^{n-1}a_jA_{j-1}\\&=2A_{n-1}^2+2a_nA_{n-1}-2\sum_{j=1}^{n}a_jA_{j-1}\\&=2A_{n-1}A_n-2\sum_{j=1}^{n}a_jA_{j-1}.\end{aligned}$$

由此可见，对每 $n\geqslant 1$，

$$\sum_{k=1}^{\tau\wedge n-1}\xi_k^2+S_{\tau\wedge n-1}^2=2S_{\tau\wedge n-1}S_{\tau\wedge n}-2\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_kS_{k-1}\quad \text{a.s.}.$$

上式两端取 $E$，并注意(2.2.12)和下鞅差性质蕴含

$$\begin{aligned}E\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_kS_{k-1}&=E\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}E(\xi_kS_{k-1}\mid\mathscr{F}_{k-1})\\&=E\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}S_{k-1}E(\xi_k\mid\mathscr{F}_{k-1})\geqslant 0,\end{aligned}$$

便得到

(2.4.9) $$E\sum_{k=1}^{\tau\wedge n-1}\xi_k^2+ES_{\tau\wedge n-1}^2\leqslant 2ES_{\tau\wedge n-1}S_{\tau\wedge n},\quad n\geqslant 1.$$

由单调收敛定理易见

$$\lim_{n\to\infty}E\sum_{k=1}^{\tau\wedge n-1}\xi_k^2=E\sum_{k=1}^{\tau-1}\xi_k^2.$$

注意 $S_{\tau\wedge n-1}\leqslant C$ 对每 $n\geqslant 1$ 成立,由有界收敛定理又得

$$\lim_{n\to\infty}ES_{\tau\wedge n-1}^2=ES_{\tau-1}^2.$$

再注意 $S_\tau\in L_1$,因而

$$S_{\tau\wedge n-1}S_{\tau\wedge n}\leqslant CS_{\tau\wedge n}\leqslant CS_nI_{(\tau>n)}+CS_\tau I_{(\tau\leqslant n)}\leqslant C^2+CS_\tau\in L_1,$$

由 Lebesgue 控制收敛定理又得

$$\lim_{n\to\infty}ES_{\tau\wedge n-1}S_{\tau\wedge n}=ES_{\tau-1}S_\tau.$$

因此,在(2.4.9)中令 $n\to\infty$ 即得(2.4.8)之第一个不等式. 由 $\tau$ 的定义和引理 2.4.3 又知

$$ES_{\tau-1}S_\tau\leqslant CES_\tau\leqslant C\sup_{n\geqslant 1}ES_n.$$

因此(2.4.8)之第二个不等式也成立. 证完.

**引理 2.4.5** 设适 r.v. 列 $\{S_k,\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$ 是非负下鞅. 对 $k=1,\cdots,n$,令 $\xi_k=S_k-S_{k-1}$(记 $S_0=0$,下同). 则

(2.4.10) $$P\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2>C^2,\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant C\right)\leqslant 2ES_n/C$$

对每 $C>0$ 成立.

**证明** 无妨设 $ES_n<\infty$. 令

$$\tilde{S}_k=\begin{cases}S_k, & 1\leqslant k\leqslant n,\\ S_n, & k>n;\end{cases}$$

$$\tilde{\mathscr{F}}_k=\begin{cases}\mathscr{F}_k, & 1\leqslant k\leqslant n,\\ \mathscr{F}_n, & k>n.\end{cases}$$

则 $\{\tilde{S}_k,\tilde{\mathscr{F}}_k,k\geqslant 1\}$ 仍是非负下鞅且

$$\sup_{k\geqslant 1}E\tilde{S}_k=\max_{1\leqslant k\leqslant n}ES_k=ES_n<\infty.$$

记 $\tilde{\xi}_k=\tilde{S}_k-\tilde{S}_{k-1}, k\geqslant 1$（约定 $\tilde{S}_0=0$，下同），$\tau=\inf\{k\geqslant 1:\tilde{S}_k>C\}$，由引理 2.4.4 得

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2>C^2,\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant C\Big)=P\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\xi}_k^2>C^2,\sup_{k\geqslant 1}\tilde{S}_k\leqslant C\Big)$$

$$\leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\xi}_k^2>C^2,\tau=\infty\Big)$$

$$\leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{\tau-1}\tilde{\xi}_k^2>C^2\Big)\leqslant E\sum_{k=1}^{\tau-1}\tilde{\xi}_k^2/C^2$$

$$\leqslant 2\sup_{k\geqslant 1}E\tilde{S}_k/C=2ES_n/C.$$

证完.

**引理 2.4.6** 如适 r. v. 列 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是非负下鞅. 对每 $k=1,\cdots,n$，记 $\xi_k=S_k-S_{k-1}$. 则

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)^{1/2}\Big\|_p\leqslant 9p^{3/2}\|S_n\|_p/(p-1) \tag{2.4.11}$$

对每 $p>1$ 成立.

**证明** 对每 $k=1,\cdots,n$，令

$$Q_k=\Big(\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2\Big)^{1/2}.$$

又对任给定之 $\theta,C>0$，记

$$\tau=\begin{cases}\min\{k:1\leqslant k\leqslant n,\theta Q_k>C\}, & \{k:1\leqslant k\leqslant n,\theta Q_k>C\}\neq\varnothing,\\ n+1, & \text{其他};\end{cases}$$

$$\tilde{S}_k=S_kI_{\{\tau\leqslant k\}},\quad k=1,\cdots,n.$$

由于对每 $k=1,\cdots,n$，

$$\{\tau\leqslant k\}=\bigcup_{i=1}^{k}\{\theta Q_i>C\}=\{\theta Q_k>C\}\in\mathscr{F}_k.$$

故 $\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$ 的停时. 又由于

$$E(\tilde{S}_k|\mathscr{F}_{k-1})=E(S_kI_{\{\tau\leqslant k\}}|\mathscr{F}_{k-1})\geqslant E(S_k|\mathscr{F}_{k-1})I_{\{\tau\leqslant k-1\}}$$

$$\geqslant S_{k-1}I_{\{\tau\leqslant k-1\}}=\tilde{S}_{k-1}\quad\text{a. s.}$$

对每 $k=2,\cdots,n$ 成立，故$\{\tilde{S}_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$是下鞅.

对每 $k=1,\cdots,n$，记$\tilde{\xi}_k=\tilde{S}_k-\tilde{S}_{k-1}$. 不难见，当 $\tau<k\leqslant n$ 时；$\tilde{\xi}_k=\xi_k$. 再记 $\tilde{Q}_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\xi}_k^2\right)^{1/2}$，则

$$\sum_{k=\tau+1}^{n}\xi_k^2=\sum_{k=\tau+1}^{n}\tilde{\xi}_k^2\leqslant\tilde{Q}_n^2.$$

因此，在集合

$$\{\tau\leqslant n,\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant C\}=\{\theta Q_n>C,\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant C\}$$

上，总有

$$\theta^2Q_n^2=\theta^2Q_{\tau-1}^2+\theta^2\xi_\tau^2+\theta^2\sum_{k=\tau+1}^{n}\xi_k^2\leqslant C^2(1+\theta^2)+\theta^2\tilde{Q}_n^2.$$

于是，记 $\zeta_n=(\theta Q_n)\vee(\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k)$，便得

$$\begin{aligned}
&\{\zeta_n>C(1+2\theta^2)^{1/2}\}\\
&\subset\{\theta Q_n>C(1+2\theta^2)^{1/2},\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant C\}\cup\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k>C\}\\
&\subset\{\tilde{Q}_n>C,\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant C\}\cup\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k>C\}\\
&\subset\{\tilde{Q}_n>C,\max_{1\leqslant k\leqslant n}\tilde{S}_k\leqslant C\}\cup\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k>C\}.
\end{aligned}$$

由此，并利用(2.4.10)和(2.4.1)，我们又有

$$\begin{aligned}
&P(\zeta_n>C(1+2\theta^2)^{1/2})\\
&\leqslant P(\tilde{Q}_n>C,\max_{1\leqslant k\leqslant n}\tilde{S}_k\leqslant C)+P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k>C)\\
&\leqslant 2E\tilde{S}_n/C+ES_nI_{\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k>C\}}/C\\
&\leqslant(2ES_nI_{\{\tau\leqslant n\}}+ES_nI_{\{\zeta_n>C\}})/C\\
&\leqslant 3ES_nI_{\{\zeta_n>C\}}/C.
\end{aligned}$$

这样就由 Hölder 不等式推知

$$\begin{aligned}
&E[\zeta_n/(1+2\theta^2)^{1/2}]^p\\
&=p\int_0^\infty u^{p-1}P(\zeta_n>(1+2\theta^2)^{1/2}u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$\leqslant 3p\int_0^{\infty} u^{p-2}(ES_n I_{(\zeta_n > u)})\mathrm{d}u$$
$$= 3pES_n\int_0^{\zeta_n} u^{p-2}\mathrm{d}u$$
$$= 3pES_n\zeta_n^{p-1}/(p-1)$$
$$\leqslant 3p\,\|S_n\|_p\,\|\zeta_n^{p-1}\|_q/(p-1),$$

其中 $q=p/(p-1)$. 对上式略作整理,成为

$$\|\zeta_n\|_p \leqslant 3p(1+2\theta^2)^{p/2}\|S_n\|_p/(p-1).$$

再取其中的 $\theta=p^{-1/2}$ 并注意 $(1+2/p)^{p/2}\leqslant 3$,最后便得

$$\|Q_n\|_p \leqslant \|\zeta_n\|_p/\theta$$
$$\leqslant 3p^{3/2}(1+2/p)^{p/2}\|S_n\|_p/(p-1)$$
$$\leqslant 9p^{3/2}\|S_n\|_p/(p-1),$$

即(2.4.11). 证完.

下面,我们叙述并证明 Burkholder 不等式.

**定理 2.4.7** 设 $L_1$ 适 r.v. 列 $\{S_k,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$ 是鞅. 对每 $k=1,\cdots,n$,令 $\xi_k=S_k-S_{k-1}$,则对任 $p>1$,

(2.4.12) $$a_p^{-1}\|Q_n\|_p \leqslant \|S_n\|_p \leqslant b_p\|Q_n\|_p$$

成立,其中

$$Q_n=\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\Big)^{1/2};$$
$$a_p=18p^{3/2}/(p-1);$$
$$b_p=18p^{3/2}/(p-1)^{1/2}.$$

**证明** 对每 $k=1,\cdots,n$,令

$$S_k^{(1)}=E(S_n^+\,|\mathscr{F}_k);\quad S_k^{(2)}=E(S_k^-\,|\mathscr{F}_k).$$

易见 $\{S_k^{(i)},\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$ 当 $i=1,2$ 时都是非负鞅. 对每 $i=1,2$ 和每 $k=1,\cdots,n$,记 $\xi_k^{(i)}=S_k^{(i)}-S_{k-1}^{(i)}$;再记 $Q_n^{(i)}=\Big[\sum_{k=1}^n(\xi_k^{(i)})^2\Big]^{1/2}$. 便有

$$Q_n \leqslant Q_n^{(1)} + Q_n^{(2)}.$$

上式两端取 $L_p$ 模，再利用 Minkowski 不等式及(2.4.11)式便得到

$$\begin{aligned}\| Q_n \|_p &\leqslant \| Q_n^{(1)} \|_p + \| Q_n^{(2)} \|_p \\ &\leqslant 9p^{3/2}( \| S_n^{(1)} \|_p + \| S_n^{(2)} \|_p)/(p-1) \\ &= 9p^{3/2}( \| S_n^{+} \|_p + \| S_n^{-} \|_p)/(p-1) \\ &\leqslant 18p^{3/2} \| S_n \|_p/(p-1) = a_p \| S_n \|_p.\end{aligned}$$

这就证明了(2.4.12)之第一个不等式.

往证第二个不等式. 无妨设 $\| S_n \|_p > 0$，$\| Q_n \|_p < \infty$. 这时由 $C_r$ 不等式推知

$$\| S_n \|_p \leqslant n^{1/2} \| Q_n \|_p < \infty.$$

记 $\widetilde{S}_n = |S_n|^{p-1}\mathrm{sgn}S_n / \| S_n \|_p^{p-1}$(sgn 记符号函数，即当 $x>0$ 时 $\mathrm{sgn}x=1$，当 $x=0$ 时 $\mathrm{sgn}x=0$，当 $x<0$ 时 $\mathrm{sgn}x=-1$)和 $q=p/(p-1)$. 对每 $k=1,\cdots,n$，令

$$\widetilde{S}_k = E(\widetilde{S}_n|\mathscr{F}_k);\ \widetilde{\xi}_k = \widetilde{S}_k - \widetilde{S}_{k-1}\quad \text{a.s.}.$$

再记 $\widetilde{Q}_n = \left(\sum_{k=1}^n \widetilde{\xi}_k^2\right)^{1/2}$. 注意

$$E\sum_{k<l} \xi_k \widetilde{\xi}_l = \sum_{k<l} E[\xi_k E(\widetilde{\xi}_l|\mathscr{F}_k)] = 0,$$

$$E\sum_{k<l} \widetilde{\xi}_k \xi_l = \sum_{k<l} E[\widetilde{\xi}_k E(\xi_l|\mathscr{F}_k)] = 0,$$

利用 Hölder 不等式，把已经证明了的(2.4.12)之第一个不等式用于 $L_q$ 鞅$\{\widetilde{S}_k,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$并注意 $E|\widetilde{S}_n|^q=1$ 和 $a_q=b_p$，我们得

$$\begin{aligned}\| S_n \|_p &= E|S_n|^p / \| S_n \|_p^{p-1} = ES_n\widetilde{S}_n \\ &= E\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \widetilde{\xi}_k\right) = E\sum_{k=1}^n \xi_k \widetilde{\xi}_k \\ &\leqslant EQ_n\widetilde{Q}_n \leqslant \| Q_n \|_p \| \widetilde{Q}_n \|_q \\ &\leqslant \| Q_n \|_p \cdot a_q \| \widetilde{S}_n \|_q = a_q \| Q_n \|_p = b_p \| Q_n \|_p.\end{aligned}$$

这又证明了(2.4.12)之第二个不等式.定理证完.

把(2.4.2)和(2.4.12)结合,得

**系 2.4.8** 在定理 2.4.7 的条件下,有

(2.4.13) $a_p^{-1}\|Q_n\|_p \leqslant \|\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\|_p \leqslant pb_p\|Q_n\|_p/(p-1)$.

在(2.4.12)和(2.4.13)中分别令 $n\to\infty$,又得

**系 2.4.9** 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是 $L_1$ 鞅,对每 $n\geqslant1$,记 $\xi_n=S_n-S_{n-1}$ a.s..又令 $Q=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2\right)^{1/2}$,则对每 $p>1$ 有

(2.4.14) $$a_p^{-1}\|Q\|_p \leqslant \sup_{n\geqslant1}\|S_n\|_p \leqslant b_p\|Q\|_p;$$

(2.4.15) $$a_p^{-1}\|Q\|_p \leqslant \|\sup_{n\geqslant1}|S_n|\|_p \leqslant pb_p\|Q\|_p/(p-1).$$

### 4.3 Davis 不等式

Davis 不等式是考察 $p=1$ 时的情况.它说明除了(2.4.12)的前一个不等式以外,4.2 小节的其他不等式都可推广到 $p=1$ 的情形.

**引理 2.4.10** 设适 r.v.列$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$是 $L_1$ 鞅,记 $\xi_n=S_n-S_{n-1},n\geqslant1$.又$\{\eta_n,\mathscr{F}_{n-1},n\geqslant1\}$(约定 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$)是 $L_1$ 适 r.v.列,使得$|\xi_n|\leqslant\eta_n$ a.s.,$n\geqslant1$.令

$$M=\sup_{n\geqslant1}|S_n|;\quad Q=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2\right)^{1/2};\quad V=\sup_{n\geqslant1}\eta_n,$$

则对任 $\lambda>0$ 以及 $0<\delta<\beta-1$,有

(2.4.16) $$P(M>\beta\lambda,Q\vee V\leqslant\delta\lambda) \leqslant 2\delta^2P(M>\lambda)/(\beta-\delta-1)^2;$$

(2.4.17) $$P(Q>\beta\lambda,M\vee V\leqslant\delta\lambda) \leqslant 9\delta^2P(Q>\lambda)/(\beta^2-\delta^2-1).$$

**证明** 先证(2.4.16).按照我们的约定,$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0\}$还是 $L_1$ 鞅,令

$$Q_n = \Big( \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \Big)^{1/2}, \quad n \geqslant 1,$$

$$\tau_1 = \inf\{n \geqslant 0: |S_n| > \lambda\},$$

$$\tau_2 = \inf\{n \geqslant 0: |S_n| > \beta\lambda\},$$

$$\tau_3 = \inf\{n \geqslant 0: Q_n \vee \eta_{n+1} > \delta\lambda\},$$

并约定 $\inf\varnothing = \infty$. 易见 $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ 关于 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是停时. 再令

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k I_{\{\tau_1 < k \leqslant \tau_2 \wedge \tau_3\}}, \quad n \geqslant 0,$$

则 $\{\widetilde{S}_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 仍是 $L_1$ 鞅. 利用(2.2.11)易见

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \xi_k^2 I_{\{\tau_1 < k \leqslant \tau_2 \wedge \tau_3\}} &\leqslant I_{\{\tau_1 < \infty\}} \sum_{k=0}^{n} \xi_k^2 I_{\{\tau_3 \geqslant k\}} = I_{\{\tau_1 < \infty\}} Q_{\tau_3 \wedge n}^2 \\
&= I_{\{\tau_1 < \infty\}} \big[ (Q_{\tau_3 - 1}^2 + \xi_{\tau_3}^2) I_{\{\tau_3 \leqslant n\}} + Q_n^2 I_{\{\tau_3 > n\}} \big] \\
&\leqslant I_{\{\tau_1 < \infty\}} \big[ (\delta^2\lambda^2 + \eta_{\tau_3}^2) I_{\{\tau_3 \leqslant n\}} + \delta^2\lambda^2 I_{\{\tau_3 > n\}} \big] \\
&\leqslant 2\delta^2\lambda^2 I_{\{\tau_1 < \infty\}} \quad \text{a.s.}, \quad n \geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\sup_{n \geqslant 1} E\widetilde{S}_n^2 \leqslant 2\delta^2\lambda^2 P(\tau_1 < \infty) = 2\delta^2\lambda^2 P(M > \lambda). \tag{2.4.18}$$

注意在集合

$$\{M > \beta\lambda, Q \vee V \leqslant \delta\lambda\} = \{\tau_2 < \infty, \tau_3 = \infty\}$$

上, 对每 $n \geqslant 1$ 有

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{\tau_1 < k \leqslant \tau_2\}} = S_{\tau_2 \wedge n} - S_{\tau_1 \wedge n},$$

$$|S_{\tau_2 \wedge n}| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |S_k| I_{\{\tau_2 = k\}} > \beta\lambda I_{\{\tau_2 \leqslant n\}},$$

以及

$$\begin{aligned}
|S_{\tau_1 \wedge n}| &= |S_{\tau_1}| I_{\{\tau_1 \leqslant n\}} + |S_n| I_{\{\tau_1 > n\}} \\
&\leqslant (|S_{\tau_1 - 1}| + \eta_{\tau_1}) I_{\{\tau_1 \leqslant n\}} + |S_n| I_{\{\tau_1 > n\}} \\
&\leqslant \lambda + V \leqslant (1 + \delta)\lambda \quad \text{a.s.},
\end{aligned}$$

从而下式成立

$$\begin{aligned}\sup_{n\geqslant 1}|\widetilde{S}_n| &\geqslant \sup_{n\geqslant 1}(|S_{\tau_2\wedge n}| - |S_{\tau_1\wedge n}|)\\ &\geqslant \sup_{n\geqslant 1}[\beta\lambda I_{\{\tau_2\leqslant n\}} - (1+\delta)\lambda]\\ &= (\beta-\delta-1)\lambda \quad \text{a.s.}.\end{aligned}$$

由(2.4.1)和(2.4.18)便推知

$$\begin{aligned}&P(M>\beta\lambda, Q\vee V\leqslant\delta\lambda)\\ &\quad\leqslant P(\sup_{n\geqslant 1}|\widetilde{S}_n|>(\beta-\delta-1)\lambda)\\ &\quad= P(\sup_{n\geqslant 1}\widetilde{S}_n^2>(\beta-\delta-1)^2\lambda^2)\\ &\quad= \lim_{n\to\infty}P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\widetilde{S}_k^2>(\beta-\delta-1)^2\lambda^2)\\ &\quad\leqslant \lim_{n\to\infty}E\widetilde{S}_n^2/[(\beta-\delta-1)^2\lambda^2]\\ &\quad= (\sup_{n\geqslant 1}E\widetilde{S}_n^2)/[(\beta-\delta-1)^2\lambda^2]\\ &\quad\leqslant 2\delta^2P(M>\lambda)/(\beta-\delta-1)^2,\end{aligned}$$

即(2.4.16)成立.

再证(2.4.17). 令

$$M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|,\quad n\geqslant 1;$$

$$\sigma_1 = \inf\{n\geqslant 0: Q_n>\lambda\};$$

$$\sigma_2 = \inf\{n\geqslant 0: Q_n>\beta\lambda\};$$

$$\sigma_3 = \inf\{n\geqslant 0: M_n\vee\eta_{n+1}>\delta\lambda\};$$

$$\hat{S}_n = \sum_{k=1}^n \xi_k I_{\{\sigma_1<k\leqslant\sigma_2\wedge\sigma_3\}},\quad n\geqslant 0.$$

易见 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 是$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 0\}$的停时,$\{\widetilde{S}_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是 $L_1$ 鞅. 由

$$\begin{aligned}&\sup_{n\geqslant 1}|\hat{S}_n|I_{\{\sigma_1<\sigma_3<\infty\}}\\ &\leqslant\left(\sup_{n\geqslant 1}|S_{\sigma_2\wedge\sigma_3\wedge n}| + \sup_{n\geqslant 1}|S_{\sigma_1\wedge n}|\right)I_{\{\sigma_1<\sigma_3<\infty\}}\\ &\leqslant(M_{\sigma_3}+M_{\sigma_1})I_{\{\sigma_1<\sigma_3<\infty\}}\end{aligned}$$

$$\leqslant \left( 2M_{\sigma_3-1} + \max_{1\leqslant n\leqslant \sigma_3} \eta_n \right) I_{\{\sigma_1<\sigma_3<\infty\}}$$

$$\leqslant 3\delta\lambda I_{\{\sigma_1<\sigma_3<\infty\}} \quad \text{a.s.}$$

和

$$\sup_{n\geqslant 1} |\hat{S}_n| I_{\{\sigma_1<\sigma_3=\infty\}}$$

$$\leqslant \left( \sup_{n\geqslant 1} |S_{\sigma_3\wedge n}| + \sup_{n\geqslant 1} |S_{\sigma_1\wedge n}| \right) I_{\{\sigma_1<\sigma_3=\infty\}}$$

$$\leqslant 2MI_{\{\sigma_1<\sigma_3=\infty\}} \leqslant 2\delta\lambda I_{\{\sigma_1<\sigma_3=\infty\}},$$

我们得

$$\sup_{n\geqslant 1} |\hat{S}_n| = \sup_{n\geqslant 1} |\hat{S}_n| I_{\{\sigma_1<\sigma_3\}}$$

$$\leqslant 3\delta\lambda I_{\{\sigma_1<\sigma_3<\infty\}} + 2\delta\lambda I_{\{\sigma_1<\sigma_3=\infty\}}$$

$$\leqslant 3\delta\lambda I_{\{\sigma_1<\sigma_3\}} \quad \text{a.s.}.$$

于是可见

$$\sup_{n\geqslant 1} E\hat{S}_n^2 \leqslant 9\delta^2\lambda^2 P(\sigma_1 < \sigma_3) \leqslant 9\delta^2\lambda^2 P(\sigma_1 < \infty) = 9\delta^2\lambda^2 P(Q > \lambda). \tag{2.4.19}$$

注意在集合

$$\{Q > \beta\lambda, M \vee V \leqslant \delta\lambda\} = \{\sigma_2 < \infty, \sigma_3 = \infty\}$$

上，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 I_{\{\sigma_1<k\leqslant\sigma_2\wedge\sigma_3\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 I_{\{\sigma_1<k\leqslant\sigma_2\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (Q_{\sigma_2\wedge n}^2 - Q_{\sigma_1\wedge n}^2)$$

$$\geqslant \limsup_{n\to\infty} \{Q_{\sigma_2\wedge n}^2 - [(Q_{\sigma_1-1}^2 + \eta_{\sigma_1}^2) I_{\{\sigma_1\leqslant n\}} + Q_n^2 I_{\{\sigma_1>n\}}]\}$$

$$\geqslant \limsup_{n\to\infty} [Q_{\sigma_2\wedge n}^2 - (1+\delta^2)\lambda^2]$$

$$= Q_{\sigma_2}^2 - (1+\delta^2)\lambda^2$$

$$>(\beta^2-\delta^2-1)\lambda^2 \quad \text{a.s.}.$$

故由(2.4.19)推知

$$\begin{aligned}
&P(Q>\beta\lambda, M\vee V\leqslant\delta\lambda)\\
&\leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2 I_{\{\sigma_1<k\leqslant\sigma_2\wedge\sigma_3\}}>(\beta^2-\delta^2-1)\lambda^2\Big)\\
&\leqslant E\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2 I_{\{\sigma_1<k\leqslant\sigma_2\wedge\sigma_3\}}/[(\beta^2-\delta^2-1)\lambda^2]\\
&=\sup_{n\geqslant 1} E\hat{S}_n^2/[(\beta^2-\delta^2-1)\lambda^2]\\
&\leqslant 9\delta^2 P(Q>\lambda)/(\beta^2-\delta^2-1).
\end{aligned}$$

这又证明了(2.4.17). 引理证完.

下列定理称为 Davis 不等式.

**定理 2.4.11** 设适 r.v. 列$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是 $L_1$ 鞅,对每 $n\geqslant 1$,记 $\xi_n=S_n-S_{n-1}$. 令 $M,Q$ 如引理 2.4.10,则存在 $0<a\leqslant b<\infty$,使

$$aEQ\leqslant EM\leqslant bEQ. \tag{2.4.20}$$

**证明** 对每 $n\geqslant 1$,记

$$\eta_n=4\max_{1\leqslant k<n}|\xi_k|,$$

易见$\{\eta_n,\mathscr{F}_{n-1},n\geqslant 1\}$是 $L_1$ 适 r.v. 列. 又对每 $n\geqslant 1$,令

$$\xi_n^{(1)}=\xi_n I_{\{2|\xi_n|\leqslant\eta_n\}}-E(\xi_n I_{\{2|\xi_n|\leqslant\eta_n\}}|\mathscr{F}_{n-1});$$

$$\xi_n^{(2)}=\xi_n I_{\{2|\xi_n|>\eta_n\}}-E(\xi_n I_{\{2|\xi_n|>\eta_n\}}|\mathscr{F}_{n-1}).$$

$$S_n^{(i)}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{(i)},\quad i=1,2.$$

不难见$\{S_n^{(i)},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$当 $i=1,2$ 时都是 $L_1$ 鞅且

$$S_n=S_n^{(1)}+S_n^{(2)},\quad n\geqslant 1.$$

对 $i=1,2$,记

$$M^{(i)}=\sup_{n\geqslant 1}|S^{(i)}|;\quad Q^{(i)}=\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n^{(i)})^2\Big]^{1/2},$$

便有

$$(2.4.21)\qquad EM \leqslant EM^{(1)} + EM^{(2)} \leqslant EM^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} E|\xi_n^{(2)}|;$$

$$(2.4.22)\qquad \begin{aligned} EQ &\leqslant EQ^{(1)} + EQ^{(2)} \\ &= EQ^{(1)} + \lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{k=1}^{n} (\xi^{(2)})^2\Big]^{1/2} \\ &\leqslant EQ^{(1)} + \lim_{n\to\infty} E\sum_{k=1}^{n} |\xi^{(2)}| \\ &= EQ^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} E|\xi_n^{(2)}|. \end{aligned}$$

考察(2.4.21)的右端. 注意

$$V =: \sup_{n\geqslant 1} \eta_n = 4\sup_{n\geqslant 1} |\xi_n| \leqslant 4Q.$$

又注意当 $2|\xi_n| > \eta_n$ 时,

$$|\xi_n| + \eta_n/2 < 2|\xi_n| \leqslant \eta_{n+1}/2$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立,因而

$$(2.4.23)\qquad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} E|\xi_n^{(2)}| &\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} E|\xi_n| I_{\{2|\xi_n|>\eta_n\}} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E(\eta_{n+1} - \eta_n) = EV \leqslant 4EQ. \end{aligned}$$

对任 $0<\delta<\beta-1$,把(2.4.16)用于$\{S_n^{(1)}, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$,我们得

$$\begin{aligned} EM^{(1)}/\beta &= \int_0^{\infty} P(M^{(1)} > \beta\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant \int_0^{\infty} [P(M^{(1)} > \beta\lambda, Q^{(1)} \vee V \leqslant \delta\lambda) + P(Q^{(1)} > \delta\lambda) \\ &\quad + P(V > \delta\lambda)]\mathrm{d}\lambda \\ &\leqslant 2\delta^2 \int_0^{\infty} P(M^{(1)} > \lambda)\mathrm{d}\lambda/(\beta - \delta - 1)^2 \\ &\quad + EQ^{(1)}/\delta + EV/\delta \end{aligned}$$

$$\leqslant 2\delta^2 EM^{(1)}/(\beta-\delta-1)^2+(EQ+EQ^{(2)})/\delta+4EQ/\delta$$

$$\leqslant 2\delta^2 EM^{(1)}/(\beta-\delta-1)^2+5EQ/\delta+\sum_{n=1}^{\infty}E|\xi_n^{(2)}|/\delta$$

$$\leqslant 2\delta^2 EM^{(1)}/(\beta-\delta-1)^2+9EQ/\delta.$$

固定 $\beta>1$，取 $\delta\in(0,\beta-1)$ 充分小使

$$\gamma=1/\beta-2\delta^2/(\beta-\delta-1)^2>0.$$

上式整理后便得

$$EM^{(1)}\leqslant 9EQ/(\gamma\delta).$$

此式与(2.4.23)一起再代入(2.4.21)右端，并且取 $b=9/(\gamma\delta)+4$ 即得(2.4.20)之第二个不等式.

再考察(2.4.22)之右端. 注意

$$V=4\sup_{n\geqslant 1}|\xi_n|\leqslant 8M,$$

并由此式和(2.4.23)推得

$$\sum_{n=1}^{\infty}E|\xi_n^{(2)}|\leqslant EV\leqslant 8EM \tag{2.4.24}$$

以及

$$EM^{(1)}\leqslant EM+EM^{(2)}\leqslant EM+\sum_{n=1}^{\infty}E|\xi_n^{(2)}|\leqslant 9EM.$$

把(2.4.17)用于 $\{S_n^{(1)},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$，对任何 $0<\delta<\beta-1$，我们有

$$EQ^{(1)}/\beta=\int_0^{\infty}P(Q^{(1)}>\beta\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant\int_0^{\infty}[P(Q^{(1)}>\beta\lambda,M^{(1)}\vee V\leqslant\delta\lambda)+P(M^{(1)}>\delta\lambda)$$

$$+P(V>\delta\lambda)]\mathrm{d}\lambda$$

$$\leqslant 9\delta^2\int_0^{\infty}P(Q^{(1)}>\lambda)\mathrm{d}\lambda/(\beta^2-\delta^2-1)+EM^{(1)}/\delta+EV/\delta$$

$$\leqslant 9\delta^2 EQ^{(1)}/(\beta^2-\delta^2-1)+17EM/\delta.$$

取定 $\beta>1$，再取 $\delta\in(0,\beta-1)$ 使

$$\varepsilon=1/\beta-9\delta^2/(\beta^2-\delta^2-1)>0.$$

前式整理后得

$$EQ^{(1)} \leqslant 17EM/(\delta\varepsilon).$$

此式再和(2.4.24)一起代入(2.4.22)右端并取 $a=[8+17/(\delta\varepsilon)]^{-1}$即得(2.4.20)之前一个不等式.定理证完.

**系 2.4.12** 设适 r.v.列$\{S_k,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$是 $L_1$ 鞅,对每 $k=1,\cdots,n$,令 $\xi_k=S_k-S_{k-1}$.则存在 $0<a\leqslant b<\infty$使

$$aEQ_n \leqslant EM_n \leqslant bEQ_n, \tag{2.4.25}$$

其中 $Q_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{1/2}$,$M_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|$.

**证明** 对每 $k\geqslant1$,令

$$\widetilde{S}_k=\begin{cases}S_k, & k=1,\cdots,n,\\ S_n, & k=n+1,\cdots;\end{cases}$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}_k=\begin{cases}\mathscr{F}_k, & k=1,\cdots,n,\\ \mathscr{F}_n, & k=n+1,\cdots.\end{cases}$$

再把定理 2.4.11 用于 $L_1$ 鞅$\{\widetilde{S}_k,\widetilde{\mathscr{F}}_k,k\geqslant1\}$即可.

### 4.4 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式

我们把 Burkholder 和 Davis 不等式应用到独立 r.v.部分和的情况,以得到 M-Z 不等式.

**定理 2.4.13** 设$\{\xi_k,1\leqslant k\leqslant n\}$是独立 r.v.序列,对 $k=1,\cdots,n$,$E\xi_k=0$.记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,$Q_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{1/2}$.则对每 $p\geqslant1$,存在仅与 $p$ 有关的正数 $A_p$ 和 $B_p$ 使

$$A_p\|Q_n\|_p \leqslant \|S_n\|_p \leqslant B_p\|Q_n\|_p. \tag{2.4.26}$$

**证明** 令 $\mathscr{F}_k=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_k)$,$k=1,\cdots,n$.则$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$形成 $L_1$ 鞅差.根据定理 2.4.7 和系 2.4.12,为证(2.4.26),只需对 $p=1$ 的情况证明它的前一个不等式即可.也就是说,只需证

明：存在常数 $C>0$，使

$$EQ_n \leqslant CE|S_n|. \tag{2.4.27}$$

设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是相互独立的 r.v.，对每 $k=1,\cdots,n$，

$$P(\eta_k=1)=P(\eta_k=-1)=1/2.$$

又设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $n$ 个实数. 注意

$$E\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|^4=\sum_{k=1}^n a_k^4+6\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}a_k^2a_l^2$$

$$\leqslant\Big(2\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^2=\Big[2E\Big(\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big)^2\Big]^2,$$

利用 Hölder 不等式得

$$E\Big(\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big)^2=E\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|^{2/3}\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|^{4/3}$$

$$\leqslant E^{2/3}\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|\cdot E^{1/3}\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|^4$$

$$\leqslant 2^{2/3}E^{2/3}\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|\cdot E^{2/3}\Big(\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big)^2,$$

亦即

$$E\Big(\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big)^2\leqslant\Big(2E\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|\Big)^2.$$

因此我们有

$$E\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\eta_k^2\Big)^{1/2}\leqslant E^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\eta_k^2\Big)=E^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big)^2 \tag{2.4.28}$$

$$\leqslant 2E\Big|\sum_{k=1}^n a_k\eta_k\Big|.$$

记 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 令 $\tilde{\xi}=(\tilde{\xi}_1,\cdots,\tilde{\xi}_n)$ 为与 $\xi$ 独立同分布的 r.v.，$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 如前但与 $\xi,\tilde{\xi}$ 独立（如原始的概率空间不够大，可以在一个扩大的概率空间上考虑）. 不难看出

$$(2.4.29)\quad E\left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\tilde{\xi}_k)\eta_k\right|=E\left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\tilde{\xi}_k)\right|,$$

故我们有

$$E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k\right|=E\left|E\left[\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\tilde{\xi}_k)\eta_k\,|\,\xi,\eta\right]\right|\leqslant E\left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\tilde{\xi}_k)\eta_k\right|$$

$$=E\left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\tilde{\xi}_k)\right|\leqslant 2E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|.$$

因此,参考习题 1.3.15 并利用(2.4.28)即得

$$EQ_n=E\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\eta_k^2\right)^{1/2}$$

$$=\int_{R^n}\cdots\int E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\eta_k^2\right)^{1/2}\,|\,\xi_k=a_k,k=1,\cdots,n\right]$$

$$\times P\xi^{-1}(\mathrm{d}a_1\times\cdots\times\mathrm{d}a_n)$$

$$=\int_{R^n}\cdots\int E\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\eta_k^2\right)^{1/2}P\xi^{-1}(\mathrm{d}a_1\times\cdots\times\mathrm{d}a_n)$$

$$\leqslant 2\int_{R^n}\cdots\int E\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\eta_k\right|P\xi^{-1}(\mathrm{d}a_1\times\cdots\times\mathrm{d}a_n)$$

$$=2E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k\right|\leqslant 4E|S_n|,$$

(2.4.27)得证. 定理证完.

## 习　题　2.4

1. 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是 $L_1$ 下鞅. 证明:

$$\lambda P(\min_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant\lambda)\geqslant\int_{\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}S_k\leqslant\lambda\}}S_n\mathrm{d}P-E(S_n-S_1)$$

$$\geqslant ES_1-ES_n^+,\quad n\geqslant 1$$

对一切 $\lambda\in\boldsymbol{R}$ 成立.

2. 设$\left\{S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\right\}$是非负 $L_1$ 下鞅，$\{\eta_k,\mathscr{F}_{k-1},k\geqslant 1\}$是适 r. v. 列且对每 $k\geqslant 1,\eta_k\geqslant\eta_{k+1}\geqslant 0$ a. s.. 证明：对任给 $\varepsilon>0$ 和 $n\geqslant 1$，有

$$\varepsilon P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\eta_k S_k\geqslant\varepsilon)+\int_{\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\eta_k S_k<\varepsilon\}}\eta_n S_n\mathrm{d}P\leqslant\sum_{k=1}^{n}E\eta_k\xi_k.$$

3. 设$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是 $L_1$ 上鞅，则

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>\varepsilon)\leqslant 3\max_{1\leqslant k\leqslant n}E|S_k|/\varepsilon$$

对任给 $\varepsilon>0$ 成立.

4. 设$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$是一鞅差，记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$. 证明：存在 $C>0$，使

$$P\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right)^{1/2}>\lambda\right)\leqslant CE|S_n|/\lambda$$

对一切 $\lambda>0$ 成立.

5. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立 r. v. 序列. 令

$$S_{m,n}=\sum_{k=m+1}^{n}\xi_k,\quad 0\leqslant m\leqslant n;\quad S_n=S_{0,n},n\geqslant 1.$$

证明：

（1）对任给 $\varepsilon>0$ 和 $n\geqslant 1$，

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>2\varepsilon)\leqslant P(|S_n|>\varepsilon)\Big/\min_{1\leqslant k\leqslant n}P(|S_{k,n}|\leqslant\varepsilon).$$

提示：令 $\tau=\inf\{k\geqslant 1:|S_k|>2\varepsilon\}$，则

$$\bigcup_{k=1}^{n}\{\tau=k;|S_{k,n}|\leqslant\varepsilon\}\subset\{|S_n|>\varepsilon\}.$$

（2）对每 $n\geqslant 1$，

$$\int_0^\infty P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>2t)\mathrm{d}t\leqslant 2E|S_n|+2\int_{2E|S_n|}^\infty P(|S_n|>t)\mathrm{d}t.$$

6. 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是独立 r. v. 列，对每 $k\geqslant 1,E\xi_k=0$. 记 $S_n^*=$

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$，$n\geqslant 1$．证明

$$ES_n^*\leqslant 8ES_n,\quad n\geqslant 1.$$

7．设$\{\xi_k,1\leqslant k\leqslant n\}$是独立的可积 r.v. 列；对每 $k=1,\cdots,n$，$\xi_k$是对称的（见习题 1.3 题 3），$a_k$ 是一正数．证明：对每 $p\geqslant 1$，

$$E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k I_{(|\xi_k|\leqslant a_k)}\right|^p\leqslant E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^p.$$

8．设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立同分布的 r.v. 列．记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$，$n\geqslant 1$．证明下列三命题等价：

（1）对某 $p\geqslant 1$，

$$(*)\qquad \sup_{n\geqslant 1}E|S_n/\sqrt{n}|^p<\infty;$$

（2）$E\xi_1=0$，$E\xi_1^2<\infty$；

（3）对任何 $p\in(0,2)$，（$*$）成立．

提示：(1)⇒(2)用题 7 或定理 2.4.13，(2)⇒(3)用关于独立同分布，方差存在时的中心极限定理．

9．（题 7 的推广）设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是独立 r.v.，对每 $k\geqslant 1$，$f_k(t)=E\exp(\mathrm{i}t\xi_k)$实值非负，$a_k>0$．证明对任何 $p>0$.

$$E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k I_{(|\xi_k|\leqslant a_k)}\right|^p\leqslant E\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^p$$

提示：利用习题 1.4 之题 5 和 6.

10．利用题 9 把题 8 的结论推广为：对于独立同分布的 r.v. 列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$，下列三命题等价：

（1）对某 $p>0$，

$$\sup_{n\geqslant 1}E|S_n/\sqrt{n}|^p<\infty;$$

（2）$E\xi_1=0$，$E\xi_1^2<\infty$；

（3）对任何 $p\in(0,2)$，

$$\sup_{n\geqslant 1}E|S_n/\sqrt{n}|^p<\infty.$$

# 第三章 Wiener 过程

Wiener 过程，又称为 Brown 运动，是最基本、最重要的随机过程之一. 它不仅在随机过程理论中占据重要位置，不少概率论和数理统计的问题也直接与它有关. 在概率论中，许多深入的极限定理的提法都牵涉到 Wiener 过程. 本章除介绍一些 Wiener 过程的重要性质外，将着重考虑其增量的渐近性质.

Wiener 过程有很强的物理背景. 1826 年英国植物学家 Brown 在实验中首次观察到 Brown 运动，1923 年 Wiener 给出了 Brown 运动存在性的严格数学证明.

## 第一节 Wiener 过程的定义和性质

### 1.1 Wiener 过程的定义

考察一个粒子在直线上的运动，它在时刻 $t$ 的位置记作 $W_t$. 不失一般性，假定它是从 0 出发运动的，即 $W_0=0$. 另外，假定粒子在时间间隔 $[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，…，$[t_{k-2},t_{k-1}]$ 的位移 $W_{t_1}$，$W_{t_2}-W_{t_1}$，…，$W_{t_{k-1}}-W_{t_{k-2}}$ 对它在间隔 $[t_{k-1},t_k]$ 内的位移并无影响，也就是说粒子的运动是没有“记忆”能力的. 用数学语言来说，$W_{t_1}$，$W_{t_2}-W_{t_1}$，…，$W_{t_k}-W_{t_{k-1}}$ 是相互独立的. 最后，我们假定从任意的时间 $t$ 出发，在充分小的间隔 $\Delta t$ 内，以简单随机游动的方式向左或向右移动一个距离 $\Delta x$，也就是说，对任意的 $t$，

$$P(W_{t+\Delta t}-W_t=\Delta x)=P(W_{t+\Delta t}-W_t=-\Delta x)=\frac{1}{2}.$$

这样，对任意的 $s>0$，就有

$$W_{t+s}-W_t\sim\sum_{i=1}^{k}(W_{t+i\Delta t}-W_{t+(i-1)\Delta t}),$$

其中 $k=[s/\Delta t]$. 注意 $\{W_{t+i\Delta t}-W_{t+(i-1)\Delta t}, i=1,\cdots,k\}$ 是独立同分布的，且

$$E\sum_{i=1}^{k}[W_{t+i\Delta t}-W_{t+(i-1)\Delta t}]=0,$$

$$\operatorname{var}\sum_{i=1}^{k}[W_{t+i\Delta t}-W_{t+(i-1)\Delta t}]=k(\Delta x)^2\sim s(\Delta x)^2/\Delta t$$

根据 Laplace 的关于二项分布的中心极限定理，当 $\Delta t\to 0$ 从而 $k\to\infty$ 时，在假定

$$\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta x)^2/\Delta t=\sigma^2>0$$

之下就可以得到

$$\begin{aligned}&P(W_{t+s}-W_t\leqslant x)\\&=\lim_{\Delta t\to 0}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{k}[W_{t+i\Delta t}-W_{t+(i-1)\Delta t}]}{\Delta x\sqrt{k}}\leqslant\frac{x}{\sigma\sqrt{s}}\right\}\\&=\Phi(x/(\sigma\sqrt{s})),\end{aligned}$$

这里 $\Phi$ 表示标准正态 d. f..

以上所描述的粒子运动过程就是 Wiener 过程. 换句话说，Wiener 过程可看做是简单随机游动的一个极限过程. 在上面的讨论中出现的参数 $\sigma^2$ 是非本质的，因此无妨假定 $\sigma^2=1$. 此外，作为粒子运动的描述，Wiener 过程的轨道必须是连续. 这样，就产生了下面的定义.

**定义 3.1.1** 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机过程 $W=\{W_t,t\geqslant 0\}$ 称为 Wiener 过程，如果它满足下列两条件：

(1) 对每 $\omega\in\Omega$，$W(\omega)\in C[0,\infty)$ 即 $W_t(\omega)$ 作为 $t$ 的函数是连续函数；

(2) $W_0=0$ 并且对每 $k\geqslant 1$，每 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\infty$ 和每 $x_1,\cdots,x_k\in\boldsymbol{R}$，

$$(3.1.1)\qquad P(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\leqslant x_i, i=1,\cdots,k)=\prod_{i=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_i}{\sqrt{t_i-t_{i-1}}}\right).$$

根据第一章 2.2 的说明，定义的第(1)条表明，Wiener 过程是取值于空间 $(C[0,\infty),\mathscr{B}_c[0,\infty))$ 的随机元. 设 $T$ 是 $[0,\infty)$ 的一个子集，$0\in T$. 我们将说一个随机过程 $\{W_t,t\in T\}$ 遵从 Wiener 分布，如果它满足

$$(3.1.2)\qquad W_0=0\quad \text{a.s.}$$

并且对每个 $k\geqslant 1$，每个满足 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k$ 的 $t_1,\cdots,t_k\in T$ 和每 $x_1,\cdots,x_k\in\boldsymbol{R}$，(3.1.1)成立. 这样，定义 3.1.1 的第(2)条可解释为 Wiener 过程具有 Wiener 分布. 所以，Wiener 过程是一个遵从 Wiener 分布的取值于连续函数空间的随机元. 它的存在性将在本节的最后一段加以证明.

### 1.2 Wiener 分布的性质

下面说明 Wiener 分布的若干性质.

**命题 3.1.1** 随机过程 $\{W_t,t\in T\}$ 遵从 Wiener 分布的必要充分条件是下列两条满足

(1) 对每 $k\geqslant 1$，每 $t_1,\cdots,t_k\in T$，$(W_{t_1},\cdots,W_{t_k})$ 遵从多元正态分布；

(2) 对每 $t\in T$，

$$(3.1.3)\qquad EW_t=0;$$

对每 $s,t\in T$，

$$(3.1.4)\qquad EW_sW_t=s\wedge t.$$

**证明** 充分性. 由(3.1.4)式我们得：对任何 $0\leqslant t_1<t_2<t_3<$

$\infty, t_1, t_2, t_3 \in T$,

$$
\begin{aligned}
&E(W_{t_3} - W_{t_2})(W_{t_2} - W_{t_1}) \\
&\quad = EW_{t_3}W_{t_2} - EW_{t_2}^2 - EW_{t_3}W_{t_1} + EW_{t_2}W_{t_1} \\
&\quad = t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0.
\end{aligned}
$$

此式与(1)和(3.1.3)一起，说明$\{W_t, t\in T\}$是独立增量过程. 又由(3.1.4)知对任何 $0\leqslant t_1 < t_2 < \infty, t_1, t_2 \in T$,

$$E(W_{t_2} - W_{t_1})^2 = t_2 - t_1,$$

从而由(1)和(3.1.3)推知

$$W_{t_2} - W_{t_1} \sim \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t_2 - t_1}}\right).$$

由此可见(3.1.1)成立. 在(3.1.4)中令 $s=t=0$，又推得(3.1.2). 这说明当(1)和(2)满足时，$\{W_t, t\in T\}$具有 Wiener 分布.

*必要性.* 如$\{W_t, t\in T\}$具有 Wiener 分布，那么对任 $0\leqslant t_1 < \cdots < t_k < \infty, t_1, \cdots, t_k \in T$, $(W_{t_1}, \cdots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$是联合正态的，因而其线性组合$(W_{t_1}, \cdots, W_{t_k})$亦联合正态. 这证明了(1). 另外，由(3.1.1)和(3.1.2)易知

$$EW_t = E(W_t - W_0) = 0$$

对任何 $t\in \boldsymbol{R}$ 成立及

$$EW_sW_t = EW_{s\vee t}W_{s\wedge t} = E(W_{s\vee t} - W_{s\wedge t})W_{s\wedge t} + EW_{s\wedge t}^2 = s\wedge t$$

对任何 $s, t\in T$ 成立. 证完.

**命题 3.1.2** 如$\{W_t, t\geqslant 0\}$遵从 Wiener 分布，则

(1) 对每 $t_0\geqslant 0$, $\{W_{t_0+t} - W_{t_0}, t\geqslant 0\}$遵从 Wiener 分布；

(2) 对每 $T>0$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}W_{Tt}, t\geqslant 0\right\}$遵从 Wiener 分布；

(3) $\{-W_t, t\geqslant 0\}$遵从 Wiener 分布.

**证明** 我们仅证(2)，(1)和(3)类似可证. 易见，如$\{W_t, t\geqslant 0\}$的任一有限维分布是多维正态分布，则对任 $T>0$,

$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}W_{Tt},t\geqslant 0\right\}$的有限维分布亦是多维正态分布. 又

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_{Tt}\right)=0,\quad t\geqslant 0;$$

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_{Ts}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_{Tt}\right)=\frac{1}{T}EW_{Ts}W_{Tt}=\frac{1}{T}(TS)\wedge(Tt)$$

$$=s\wedge t,\quad s,t\geqslant 0.$$

故由命题 3.1.1 即知$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}W_{Tt},t\geqslant 0\right\}$遵从 Wiener 分布. 证完.

**命题 3.1.3** 如$\{W_t,t\geqslant 0\}$遵从 Wiener 分布,则

$$\limsup_{T\to\infty}|W_t|=\infty\quad \text{a.s.}.$$

**证明** 我们只需证:对任 $M>0$,

$$P(\limsup_{n\to\infty}|W_n|>M)=1,$$

而这由下式可见

$$\begin{aligned}P(\limsup_{n\to\infty}|W_n|>M)&=\lim_{N\to\infty}P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|W_n|>M\}\right)\\&\geqslant\limsup_{N\to\infty}P(|W_N|>M)\\&=\limsup_{N\to\infty}2\left[1-\Phi\left(\frac{M}{\sqrt{N}}\right)\right]=1.\end{aligned}$$

### 1.3 Wiener 过程的强马氏性

设$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是非降 $\sigma$ 域族,$\{W_t,t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 如果对每 $s\geqslant 0$,$W_s$ 关于 $\mathscr{F}_s$ 可测而且$\{\sigma(W_t-W_s),t\geqslant s\}$与 $\mathscr{F}_s$ 独立,则称$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是一个适 Wiener 过程. 我们所说的 Wiener 过程的强马氏性的含义是:如果$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是适 Wiener 过程而 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的有限停时,则过程

$$W^{\tau}=\{W_{\tau+t}-W_{\tau},t\geqslant 0\}$$

还是一个 Wiener 过程. 不难看出,Wiener 过程的强马氏性是命题

3.1.2 之(1)的推广.

**定理 3.1.4** 如$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是适 Wiener 过程且 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的停时，则对每 $A\in\mathscr{F}_\tau$，$A\subset\{\tau<\infty\}$和每 $B\in\mathscr{R}_c[0,\infty)$，有

$$P(A\cap\{W^\tau\in B\})=P(A)P(W\in B). \tag{3.1.5}$$

**证明** 对每 $n\geqslant 1$，令

$$\tau_n=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^n}I_{\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)}(\tau)+\infty\cdot I_{\{\tau=\infty\}}.$$

当 $A\in\mathscr{F}_\tau$，$A\subset\{\tau<\infty\}$时，由适 Wiener 过程的定义和停时的性质可知：对每 $k\geqslant 1$，每 $0\leqslant t_1<\cdots<t_k<\infty$，每 $x_1,\cdots,x_k\in\boldsymbol{R}$ 和任给的 $\varepsilon>0$ 有

$$\begin{aligned}
&P(A\cap\{W_{\tau_n+t_i}-W_{\tau_n}\leqslant x_i\pm\varepsilon,i=1,\cdots,k\})\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}P\Big(A\cap\Big\{\frac{j-1}{2^n}\leqslant\tau<\frac{j}{2^n}\Big\}\\
&\qquad\cap\{W_{j/2^n+t_i}-W_{j/2^n}\leqslant x_i\pm\varepsilon,i=1,\cdots,k\}\Big)\\
&=\sum_{j=1}^{\infty}P\Big(A\cap\Big\{\frac{j-1}{2^n}\leqslant\tau<\frac{j}{2^n}\Big\}\Big)\\
&\qquad\cdot P(W_{t_i}\leqslant x_i\pm\varepsilon,i=1,\cdots,k)\\
&=P(A)P(W_{t_i}\leqslant x_i\pm\varepsilon,i=1,\cdots,k).
\end{aligned}$$

注意 $\tau_n\downarrow\tau$ 从而对任何 $t\geqslant 0$，$W_{\tau_n+t}\to W_{\tau+t}$，我们便由前式推知

$$\begin{aligned}
&P(A)P(W_{t_i}\leqslant x_i-\varepsilon,i=1,\cdots,k)\\
&\qquad\leqslant P(A\cap\{W_{\tau+t_i}-W_\tau\leqslant x_i,i=1,\cdots,k\})\\
&\qquad\leqslant P(A)P(W_{t_i}\leqslant x_i+\varepsilon,i=1,\cdots,k).
\end{aligned}$$

于上式中再令 $\varepsilon\to 0$，便可见

$$\begin{aligned}
&P(A\cap\{W_{\tau+t_i}-W_\tau\leqslant x_i,i=1,\cdots,k\})\\
&\qquad=P(A)P(W_{t_i}\leqslant x_i,i=1,\cdots,k)
\end{aligned}$$

对任 $k\geqslant 1, 0\leqslant t_1<\cdots<t_k<\infty, x_1,\cdots,x_k\in \boldsymbol{R}$ 成立. 这样，由定理1.2.4并利用典型方法即可得(3.1.5). 证完.

**系 3.1.5** 如$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是一适 Wiener 过程，$\tau$ 是$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的有限停时，则 $W^\tau=\{W_{\tau+t}-W_\tau,t\geqslant 0\}$还是 Wiener 过程.

### 1.4 Wiener 过程的存在性

所谓 Wiener 过程的存在性就是要说明：存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，在这个概率空间上有一个取值于$(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$的随机元 $W$，它遵从 Wiener 分布. 这确实是要加以说明的. 事实上，以

$$\{\Phi_{t_1,\cdots,t_k}; 0\leqslant t_1<\cdots<t_k<\infty, k\geqslant 1\}$$

记 Wiener 分布对应的有限维 d.f. 族. 那么，一个十分自然的想法将是：利用 Колмогоров 相容性定理，通过上述有限维 d.f. 族在$(\boldsymbol{R}^{[0,\infty)},\mathscr{R}^{[0,\infty)})$上产生一个概率测度 $P$，使得概率空间$(\boldsymbol{R}^{[0,\infty)},\mathscr{R}^{[0,\infty)},P)$上的坐标过程$\{\pi_t,t\geqslant 0\}$具有 Wiener 分布，然后再设法把上述过程落实到$(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$上去. 但是，这样做遇到一个很麻烦的问题. 这就是构造出来的过程"落实"起来将会十分困难，因为 $C[0,\infty)$根本就不是 $\mathscr{R}^{[0,\infty)}$的可测集. 下面，我们将对上述想法进行调整，给出一个 Wiener 过程存在性的构造性的证明. 记

$$D_k=\{i/2^k, i=0,1,\cdots\},\quad k\geqslant 0.$$

于是$[0,\infty)$上二进制有理数的全体可以表为

$$D=\bigcup_{k=0}^{\infty}D_k.$$

不难见$\{\Phi_{t_1,\cdots,t_k}:0\leqslant t_1<\cdots<t_k, t_1,\cdots,t_k\in D; k\geqslant 1\}$是$(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D)$上的相容族. 据 Колмогоров 相容性定理，在$(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D)$上有唯一的概率测度 $P$ 使

$$(3.1.6)\quad P(\pi_{t_1}^D\leqslant x_1,\cdots,\pi_{t_k}^D\leqslant x_k)=\Phi_{t_1,\cdots,t_k}(x_1,\cdots,x_k)$$

对每 $k\geqslant 1$，每 $0\leqslant t_1<\cdots<t_k<\infty$，$t_1,\cdots,t_k\in D$ 及每 $x_1,\cdots,x_k\in \boldsymbol{R}$ 成立. 考虑 $C[0,\infty)$ 到 $\boldsymbol{R}^D$ 的投影映射 $\pi_D$. 把 $C[0,\infty)$ 在 $\pi_D$ 下的像记作 $\pi_D C[0,\infty)$.

**引理 3.1.6** 下列二式成立：

$$\pi_D C[0,\infty)\in \mathscr{R}^D; \tag{3.1.7}$$

$$P(\pi_D C[0,\infty))=1. \tag{3.1.8}$$

**证明** 任给 $n\geqslant 0$，定义 $\boldsymbol{R}^D$ 到 $C[0,\infty)$ 的映射 $\xi^{(n)}=\{\xi_t^{(n)},t\geqslant 0\}$：对每 $x^D\in \boldsymbol{R}^D$，$\xi^{(n)}(x^D)$ 是 $C[0,\infty)$ 中依次连接 $\{(i/2^n,\pi_{i/2^n}^D x^D),i\geqslant 0\}$ 诸点的折线，即对每 $i\geqslant 0$，当 $t\in[i/2^n,(i+1)/2^n)$ 时，$\xi_t^{(n)}(x^D)$ 具有表达式

$$\xi_t^{(n)}(x^D)=\pi_{i/2^n}^D x^D+2^n(t-i/2^n)[\pi_{(i+1)/2^n}^D x^D-\pi_{i/2^n}^D x^D].$$

由于对每 $i\geqslant 0$，$\pi_{i/2^n}^D$ 是 $(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D)$ 上实值可测函数，故对每 $t\geqslant 0$，$\xi_t^{(n)}$ 亦是 $(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D)$ 上实值可测函数. 于是由定理 1.2.4 知 $\xi^{(n)}$ 是 $(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D,P)$ 到 $(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$ 的随机元.

由于 $[0,\infty)$ 上的连续函数由它在 $[0,\infty)$ 的可数稠集 $D$ 上的值唯一决定，故 $\pi_D$ 是 $C[0,\infty)$ 到 $\pi_D C[0,\infty)$ 上的一对一的满映射. 又不难见，当 $x^D\in\pi_D C[0,\infty)$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} d_C^\infty(\xi^{(n)}(x^D),\pi_D^{-1}x^D)=0$. 因此，对任 $x^D\in\pi_D C[0,\infty)$，当 $n,m\to\infty$ 时，总有

$$\begin{aligned}&d_C^\infty(\xi^{(m)}(x^D),\xi^{(n)}(x^D))\\&\qquad\leqslant d_C^\infty(\xi^{(m)}(x^D),\pi_D^{-1}x^D)+d_C^\infty(\xi^{(n)}(x^D),\pi_D^{-1}x^D)\to 0.\end{aligned}$$

反之，如对某 $x^D\in\boldsymbol{R}^D$，当 $m,n\to\infty$ 时有 $d_C^\infty(\xi^{(m)}(x^D),\xi^{(n)}(x^D))\to 0$，则由 $(C[0,\infty),d_C^\infty)$ 的完备性知存在 $x\in C[0,\infty)$ 使 $n\to\infty$ 时 $d_C^\infty(\xi^{(n)}(x^D),x)\to 0$，从而 $x^D=\pi_D x\in\pi_D C[0,\infty)$. 这样，我们就证明了

$$\begin{aligned}\pi_D C[0,\infty)=\{x^D\in\boldsymbol{R}^D:\lim_{m,n\to\infty} d_C^\infty(\xi^{(m)}(x^D),\\ \xi^{(n)}(x^D))=0\}\in\mathscr{R}^D,\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

即(3.1.7)成立.

对每 $k\geqslant 1, n\geqslant 1$，令

$$A_n^{(k)} = \{x^D \in \boldsymbol{R}^D : d_C^{(k)}(\xi^{(n+1)}(x^D), \xi^{(n)}(x^D)) \geqslant 1/n^2\},$$

则 $A_k^{(k)} \in \mathscr{B}^D$. 由 $d_C^\infty$ 的定义和(3.1.9)易见

$$\begin{aligned}
&\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(A_n^{(k)})^c \\
&\subset \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x^D \in \boldsymbol{R}^D : \sum_{n=1}^{\infty} d_C^{(k)}(\xi^{(n+1)}(x^D), \xi^{(n)}(x^D)) < \infty\right\} \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty}\{x^D \in \boldsymbol{R}^D : \lim_{m,n\to\infty} d_C^{(k)}(\xi^{(m)}(x^D), \xi^{(n)}(x^D)) = 0\} \\
&= \{x^D \in \boldsymbol{R}^D : \lim_{m,n\to\infty} d_C^{\infty}(\xi^{(m)}(x^D), \xi^{(n)}(x^D)) = 0\} \\
&= \pi_D C[0,\infty).
\end{aligned}$$

此外，注意(3.1.6)等价于

$$P(\pi_0^D = 0) = 1 \tag{3.1.10}$$

以及对任何 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\infty, t_1,\cdots,t_k \in D$ 及 $x_1,\cdots,x_k \in \boldsymbol{R}$,

$$P(\pi_{t_i}^D - \pi_{t_{i-1}}^D \leqslant x_i, i = 1,\cdots,k) = \prod_{i=1}^{k}\Phi(x_i/(t_i - t_{i-1})^{1/2}) \tag{3.1.11}$$

成立，由 Chebyshev 不等式又知

$$\begin{aligned}
&P(A_n^{(k)}) \leqslant n^8 E[d_C^{(k)}(\xi^{(n+1)}, \xi^{(n)})]^4 \\
&= n^8 E \max_{1\leqslant i\leqslant k2^n}\{\pi^D_{(2i-1)/2^{n+1}} - [\pi^D_{(i-1)/2^n} + \pi^D_{i/2^n}]/2\}^4 \\
&\leqslant n^8 \sum_{i=1}^{k2^n} E\{[\pi^D_{(2i-1)/2^{n+1}} - \pi^D_{(i-1)/2^n}]/2 + [\pi^D_{(2i-1)/2^{n+1}} - \pi^D_{i/2^n}]/2\}^4 \\
&= (n^8/16)\sum_{i=1}^{k2^n}\{E[\pi^D_{(2i-1)/2^{n+1}} - \pi^D_{(i-1)/2^n}]^4 \\
&\quad + 6E[\pi^D_{(2i-1)/2^{n+1}} - \pi^D_{(i-1)/2^n}]^2[\pi^D_{(2i-1)/2^{n+1}} - \pi^D_{i/2^n}]^2 \\
&\quad + E[\pi^D_{i/2^n} - \pi^D_{(2i-1)/2^{n+1}}]^4\} \\
&= 3kn^8/2^{n+4}.
\end{aligned}$$

由此可见

$$P((\pi_D C[0,\infty))^c) \leqslant P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n^{(k)}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=m}^{\infty}P(A_n^{(k)}) = 0,$$

即(3.1.8)成立. 引理证完.

定义$(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D)$到$(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$的映射

$$W(x^D) = \begin{cases}\pi_D^{-1}x^D, & x^D \in \pi_D C[0,\infty), \\ 0, & x^D \in \boldsymbol{R}^D\setminus\pi_D C[0,\infty),\end{cases} \tag{3.1.12}$$

其中符号 0 理解为 $C[0,\infty)$中恒为 0 的那个连续函数. 我们将证明 $W$ 是$(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D,P)$上的 Wiener 过程,从而完成 Wiener 过程存在性的证明.

**定理 3.1.7** 由(3.1.12)定义的 $W$ 是概率空间$(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D,P)$上的 Wiener 过程.

**证明** 不难看出,$W$ 是$(\boldsymbol{R}^D,\mathscr{R}^D,P)$上取值于$(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$的随机元. 因此只需验证定义 3.1.1 的条件(2).

由(3.1.12)、(3.1.8)和(3.1.10)易得

$$P(W_0 = 0) = P(\pi_0 W = 0)$$
$$= P(\{\pi_0^D = 0\} \cap \pi_D C[0,\infty)) = 1,$$

可见 $W_0=0$ a.s.. 对任 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k<\infty$,取 $t_1^{(n)},\cdots,t_k^{(n)}\in D$, $0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_k^{(n)}<\infty$,使

$$\lim_{n\to\infty}t_i^{(n)} = t_i, \quad i = 1,\cdots,k$$

成立,则对任 $x_1,\cdots,x_k\in \boldsymbol{R}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{t_i^{(n)}-t_{(i-1)}^{(n)}}(x_i) = \Phi_{t_i-t_{i-1}}(x_i), \quad i = 1,\cdots,k.$$

注意对任给 $\varepsilon>0$ 和任 $x_1,\cdots,x_k\in\boldsymbol{R}$,又有

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{x^D\in\pi_D C[0,\infty): \pi_{t_i^{(n)}}^D x^D - \pi_{t_{i-1}^{(n)}}^D x^D$$
$$\leqslant x_i - \varepsilon, i = 1,\cdots,k\}$$

$$\subset \{x^D \in \pi_D C[0,\infty): W_{t_i}(x^D) - W_{t_{i-1}}(x^D) \leqslant x_i, i = 1,\cdots,k\}$$

$$\subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x^D \in \pi_D C[0,\infty): \pi^D_{t_i^{(n)}} x^D \pi^D_{t_{i-1}^{(n)}} x^D$$

$$\leqslant x_i + \varepsilon, i = 1,\cdots,k\},$$

由(3.1.6),(3.1.11)和(3.1.12)便得

$$\prod_{i=1}^{k} \Phi((x_i - \varepsilon)/(t_i - t_{i-1})^{1/2})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \Phi((x_i - \varepsilon)/(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)})^{1/2})$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\pi^D_{t_i}(n) - \pi^D_{t_{i-1}}(n) \leqslant x_i - \varepsilon, i = 1,\cdots,k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\{x^D \in \pi_D C[0,\infty): \pi^D_{t_i}(n)(x^D) - \pi^D_{t_{i-1}}(n)(x^D)$$

$$\leqslant x_i - \varepsilon, i = 1,\cdots,k\})$$

$$\leqslant P(W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \leqslant x_i, i = 1,\cdots,k)$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} P(\{x^D \in \pi_D C[0,\infty): \pi^D_{t_i}(n)(x^D) - \pi^D_{t_{i-1}}(n)(x^D)$$

$$\leqslant x_i + \varepsilon, i = 1,\cdots,k\})$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\pi^D_{t_i}(n) - \pi^D_{t_{i-1}}(n) \leqslant x_i + \varepsilon, i = 1,\cdots,k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \Phi((x_i + \varepsilon)/(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(m)})^{1/2})$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \Phi((x_i + \varepsilon)/(t_i - t_{i-1})^{1/2}).$$

上式中令 $\varepsilon \to 0$,我们又证明了定义 3.1.1 中条件(2)满足. 定理证完.

今后,我们将把 Wiener 过程的分布称为空间$(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$上的 Wiener 测度. 由 Wiener 过程的存在性可见,$(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$上的 Wiener 测度恒存在. 把$(C[0,\infty),\mathscr{R}_c[0,\infty))$上的 Wiener 测度记作 $P$. 考虑 $C[0,\infty)$到 $C[0,1)$的投影映

射 $\pi$：对于 $x=(x_t,0\leqslant t<\infty)$，令

$$\pi x = \{x_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Wiener 测度在投影映射 $\pi$ 下的导出测度

$$(P\pi^{-1})(B) = P(\pi^{-1}B), \quad B \in \mathscr{R}_c[0,1]$$

常称为$(C[0,1],\mathscr{R}_c[0,1])$上的 Wiener 测度，一个取值于 $C[0,1]$ 的随机元 $W=\{W_t,0\leqslant t\leqslant 1\}$，如果其分布是 $C[0,1]$上的 Wiener 测度，则称它为区间$[0,1]$上的 Wiener 过程.

## 习 题 3.1

1. 求 Wiener 过程的有限维分布密度.

2. 证明命题 3.1.2 之(1)和(3).

3. 随机过程$\{W_t,t\geqslant 0\}$称为是平稳增量的，如果对任 $s,t\geqslant 0$，

$$P(W_{s+t} - W_s \leqslant x) = P(W_t \leqslant x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是平稳增量的独立增量过程，$W_0=0$ a.s.，对每 $t>0$，$EW_t^2<\infty$. 证明：如果 $EW_t$ 和 $EW_t^2$ 作为 $t$ 的函数是连续的，则存在 $m\in\mathbf{R}$ 和 $\sigma^2\geqslant 0$，使对每 $t\geqslant 0$，

$$EW_t = mt, \quad \mathrm{var}W_t = \sigma^2 t.$$

4. 设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是具有平稳增量的独立增量过程，$W_0=0$ a.s.，对每 $t\geqslant 0$，$EW_t^2=t$. 证明：$\{W_t,t\geqslant 0\}$遵从 Wiener 分布当且仅当对每 $T>0$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_{Tt} \leqslant x\right) = P(W_t \leqslant x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

提示：利用初等概率论中如下的中心极限定理：如$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是 i.i.d. 的 r.v. 列，$E\xi_n=0$，$E\xi_n^2=\sigma^2>0$，则

$$P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \leqslant x\right) \to \Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

5. 随机过程$\{\xi_t,t\geqslant 0\}$称为马氏过程，如对任何 $0\leqslant s<t<\infty$ 及 $B\in\mathscr{R}$，均有

$$P(\xi_t \in B | \xi_u, 0 \leqslant u \leqslant s) = P(\xi_t \in B | \xi_s) \quad \text{a.s.}.$$

证明：Wiener 过程$\{W_t, t \geqslant 0\}$是一个马氏过程并求出转移概率$P(W_t \in B | W_s = x), 0 \leqslant s < t, x \in \mathbf{R}, B \in \mathscr{R}$.

6. 概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上取值于$C[0,1]$的随机元$\{B_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$称为 Brown 桥，如果对任意的$0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$，$\{B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}\}$遵从多维正态分布，并且

$$EB_t = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$EB_sB_t = s(1 - t), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1.$$

证明：Brown 桥的存在性，即存在一个概率空间在它上面可以定义 Brown 桥.

提示：利用 Wiener 过程$\{W_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$的存在性，再令

$$B_t = W_t - tW_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

7. 证明：如$\{B_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$是 Brown 桥，则

$$\{B_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\} \overset{d}{=} \{B_{1-t}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

8. 设$\{B_t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$是 Brown 桥. 对每$t \geqslant 0$，令

$$W_t = (1 + t)B_{t/(1+t)}.$$

证明：$\{W_t, t \geqslant 0\}$是一个 Wiener 过程.

9. 证明：Brown 桥$\{B_t, t \geqslant 0\}$是一个马氏过程并求其转移概率$P(B_t \in A | B_s = x), 0 \leqslant s < t, x \in \mathbf{R}, A \in \mathscr{R}$.

10. 设$\{W_t, t \geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 对每$n \geqslant 1$，令

$$V_n = \sum_{i=1}^{2^n} |W_{i/2^n} - W_{(i-1)/2^n}|.$$

证明：对每$M > 0$，

$$P(V_n > M) \to 1, \quad n \to \infty.$$

并由此说明 Wiener 过程概率为 1 地在任何有限区间内不是有界变差的.

11. 设随机过程$\{W_t, t \geqslant 0\}$遵从 Wiener 分布，$0 \leqslant a < b$. 证明

当$[a,b]$的分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 满足$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i-t_{i-1})\to 0$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i}-W_{t_{i-1}})^2\xrightarrow{L_2}b-a.$$

12. 设$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是适 Wiener 过程. 证明：下列四个适过程是鞅：

$$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\};$$

$$\{W_t^2-t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\};$$

$$\{W_t^4-6tW_t^2+3t^2,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\};$$

$$\{\exp(\alpha W_t-\alpha^2 t/2),\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}(\alpha\in\boldsymbol{R}).$$

13. 设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 对 $a>0$，令

$$\tau_a=\inf\{t:W_t=a\};$$

$$\xi_t=\begin{cases}W_t, & t<\tau_a;\\ 2a-W_t, & t\geqslant\tau_a.\end{cases}$$

利用 Wiener 过程的强马氏性证明$\{\xi_t,t\geqslant 0\}$还是 Wiener 过程.

14. 设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 证明

$$P(\max_{0\leqslant s\leqslant t}W_s\geqslant a)=2P(W_t\geqslant a)=P(|W_t|\geqslant a)$$

对任何 $a>0$ 成立.

提示：利用上题并注意

$$\{\tau_a\leqslant t\}=\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}W_s\geqslant a\}.$$

15. 设如 13. 证明：对任 $a>0$，

$$P(\tau_a<\infty)=1;\quad E\tau_a=\infty.$$

## 第二节 Wiener 过程的增量

### 2.1 Wiener 过程增量尾概率的估计

本节我们恒以$\{W_t,t\geqslant 0\}$记某概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 Wiener 过程. 对 $s\geqslant 0,t\geqslant 0$，称 $W_{s+t}-W_s$ 为 Wiener 过程的增量.

我们将讨论与 Wiener 过程增量有关的渐近性质. 首先介绍一个标准正态分布尾概率估计的不等式

**引理 3.2.1** 对每 $x>0$,有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2}\leqslant 1-\Phi(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}. \tag{3.2.1}$$

**证明** 由分部积分得

$$0\geqslant-\int_x^\infty\frac{3}{t^4}e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}+\int_x^\infty\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt$$

$$=-\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}+\frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt,\quad x>0,$$

这给出了(3.2.1)之第一个不等式. 再一次利用分部积分,又得

$$\int_x^\infty\frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt=\frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt,$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-x^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{-t^2/2}dt\geqslant 1-\Phi(x),\quad x>0.$$

这又得到第二个不等式. 证完.

在第一章第二节,我们曾用到非负实数的二进制表示. 事实上,每一个 $t\geqslant0$ 都可表成

$$t=\sum_{k=0}^\infty a_k(t)/2^k, \tag{3.2.2}$$

其中 $a_0(t)$ 是一个非负整数而对每 $k\geqslant1$, $a_k(t)$ 非 0 即 1;如果进一步限定表示式(3.2.2)中 $a_k(t)$ 不能当 $k$ 充分大以后恒为 1,则上述表示还是唯一的. 下面,我们将又一次用到这样规定的二进制表示式,对每 $n\geqslant0$ 和表成(3.2.2)的 $t\geqslant0$,我们记

$$t_n=\sum_{k=0}^n a_k(t)/2^k.$$

**定理 3.2.2** 如 $\{W_t,t\geqslant0\}$ 是 Wiener 过程,则对每 $\varepsilon>0$,存在 $C>0$ 使

(3.2.3) $P(\sup_{0\leqslant s\leqslant T-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{s+t}-W_s|\geqslant vh^{1/2})\leqslant CTh^{-1}e^{-v^2/(2+\varepsilon)}$

对任 $v>0,T>0$ 及 $0<h<T$ 成立.

**证明** 我们先说明:只需对 $T=1$ 的情形来证明定理即可.事实上,如果对每 $\varepsilon>0$,存在 $C>0$ 使

(3.2.4) $P(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{s+t}-W_s|\geqslant vh^{1/2})\leqslant Ch^{-1}e^{-v^2/(2+\varepsilon)}$

对任 $v>0$ 和 $0<h<1$ 成立,那么对任 $T>0$,令 $\hat{s}=s/T,\hat{t}=t/T$ 和 $\hat{h}=h/T$,利用命题 3.1.2,(2)便得

$$
\begin{aligned}
&P(\sup_{0\leqslant s\leqslant T-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{s+t}-W_s|\geqslant vh^{1/2})\\
&\quad=P(\sup_{0\leqslant s\leqslant T-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}T^{1/2}|W_{(s+t)/T}-W_{s/T}|\geqslant vh^{1/2})\\
&\quad=P(\sup_{0\leqslant \hat{s}\leqslant 1-\hat{h}}\sup_{0\leqslant \hat{t}\leqslant \hat{h}}|W_{\hat{s}+\hat{t}}-W_{\hat{s}}|\geqslant v\hat{h}^{1/2})\\
&\quad\leqslant C\hat{h}^{-1}e^{-v^2/(2+\varepsilon)}=CTh^{-1}e^{-v^2/(2+\varepsilon)},
\end{aligned}
$$

从而定理的一般结论成立.

考察(3.2.4)式.如果某 $\varepsilon_0>0,C>0,v>0$ 和 $0<h<1$ 使得它成立,那么它对任何 $\varepsilon>\varepsilon_0$ 以及同一组 $C,v$ 和 $h$ 亦成立.因此,为证对任给 $\varepsilon>0$,存在 $C>0$ 使(3.2.4)对一切 $v>0$ 和 $0<h<1$ 成立,只需对任给 $\varepsilon\in(0,1)$,同样的结论成立.又当 $0<v\leqslant 1$ 时,对任给 $\varepsilon\in(0,1)$,总可以取 $C$ 充分大使

$$Ch^{-1}e^{-v^2/(2+\varepsilon)}\geqslant Ce^{-1/(2+\varepsilon)}\geqslant 1.$$

从而(3.2.4)自然成立.因此,为了完成定理证明,只需要证明:对任给 $\varepsilon\in(0,1)$,存在 $C>0$ 使(3.2.4)对一切 $v\geqslant 1$ 和 $0<h<1$ 成立.下面,我们就来做这件事.

对任给 $0<h<1,u\geqslant(2\pi)^{-1/2}$ 及 $n\geqslant 1$,由 Wiener 分布的性质和(3.2.1)知

$$
\begin{aligned}
&P(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{(s+t)_n}-W_{s_n}|\geqslant u(h+2^{-n})^{1/2})\\
&\leqslant\sum_{k=0}^{2^n-1}P(\sup_{k/2^n\leqslant s+t<(k+1)/2^n}\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1-h\\0\leqslant t\leqslant h}}|W_{(s+t)_n}-W_{s_n}|\geqslant u(h+2^{-n})^{1/2})
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{2^n-1} P\Big(\sup_{(k/2^n-h)^+\leqslant s\leqslant (k+1)/2^n} |W_{k/2^n} - W_{s_n}| \geqslant u(h+2^{-n})^{1/2}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{2^n-1}\ \sum_{i=[(k-h2^n)^+]}^{k} P(|W_{k/2^n} - W_{i/2^n}| \geqslant u(h+2^{-n})^{1/2})$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1}\ \sum_{i=[(k-h2^n)^+]}^{k} P(|W_{(k-i)/2^n}| \geqslant u(h+2^{-n})^{1/2})$$

$$\leqslant 2^n(h2^n+1)[1-\Phi(u)]$$

$$\leqslant 2\cdot 2^n(h2^n+1)\mathrm{e}^{-u^2/2}/(\sqrt{2\pi}u)$$

$$\leqslant 2^{n+1}(h2^n+1)\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

又对任给 $0<h<1, u\geqslant(2\pi)^{-1/2}, n\geqslant 1, k\geqslant 0$ 以及 $x_k=(2k+u^2)$，有

$$P\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant h} |W_{(s+t)_{n+k+1}} - W_{(s+t)_{n+k}}| \geqslant x_k/2^{(n+k+1)/2}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{2^{n+k}-1} P\Big(\sup_{i/2^{n+k}\leqslant s+t\leqslant (i+1)/2^{n+k}} |W_{(s+t)_{n+k+1}} - W_{(s+t)_{n+k}}| \geqslant x_k/2^{(n+k+1)/2}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{2^{n+k}-1} P(|W_{i/2^{n+k}+1/2^{n+k+1}} - W_{i/2^{n+k}}| \geqslant x_k/2^{(n+k+1)/2})$$

$$= 2^{n+k}P(|W_{1/2^{n+k+1}}| \geqslant x_k/2^{(n+k+1)/2})$$

$$\leqslant 2\cdot 2^{n+k}\mathrm{e}^{-x_k^2/2} = 2^{n+k+1}\mathrm{e}^{-k-u^2/2}$$

以及类似地

$$P\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant h} |W_{s_{n+k+1}} - W_{s_{n+k}}| \geqslant x_n/2^{(n+k+1)/2}\Big) \leqslant 2^{n+k+1}\mathrm{e}^{-k-u^2/2}.$$

此外，利用 Wiener 过程的连续性，对任 $0<s<1-h, 0<t<h$ 和正整数 $n$，有

$$|W_{s+t} - W_s|$$

$$\leqslant |W_{s+t} - W_{(s+t)_n}| + |W_{(s+t)_n} - W_{s_n}| + |W_s - W_{s_n}|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |W_{(s+t)_{n+k+1}} - W_{(s+t)_{n+k}}| + |W_{(s+t)_n} - W_{s_n}|$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} |W_{s_{n+k+1}} - W_{s_{n+k}}|.$$

因此我们推知

(3.2.5) $\quad P\big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{s+t} - W_s|$

$$\geqslant u(h + 2^{-n})^{1/2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} x_k/2^{(n+k+1)/2}\big)$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P\big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{(s+t)_{n+k+1}} - W_{(s+t)_{n+k}}| \geqslant x_k/2^{(n+k+1)/2}\big)$$

$$+P\big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{(s+t)_n} - W_{s_n}| \geqslant u(h+2^{-n})^{1/2}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} P\big(\sup_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{s_{n+k+1}} - W_{s_{n+k}}| \geqslant x_k/2^{(n-k+1)/2}\big)$$

$$\leqslant 2^{n+1}(h2^n + 1)e^{-u^2/2} + 2^{n+2}e^{-u^2/2}\sum_{k=0}^{\infty}(2/e)^k$$

对每 $0<h<1, u\geqslant(2\pi)^{-1/2}$ 和 $n\geqslant 1$ 成立.

记 $\alpha = 4\sum_{k=0}^{\infty}(2/e)^n, \beta = \sum_{k=0}^{\infty}(k/2^{k-1})^{1/2}$ 和 $\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^{k/2}$. 对任给 $\varepsilon\in(0,1)$，取 $K$ 充分大使

$$(1 + 2/K)^{1/2} + 2\gamma/K^{1/2} \leqslant (1 + \varepsilon/2)^{1/2}/2;$$

$$4\beta/K^{1/2} \leqslant 1,$$

则对任 $v>1$，我们有

$$u := \frac{v - 2\beta/K^{1/2}}{(1 + 2/K)^{1/2} + 2\gamma/K^{1/2}} \geqslant \frac{v}{(1+\varepsilon/2)^{1/2}} \geqslant (2\pi)^{-1/2}.$$

又对任 $0<h<1$，取 $n$ 使

$$2^n \leqslant K/h < 2^{n+1}.$$

以上述 $u$ 和 $n$ 代入(3.2.5)式，注意

$$u(h + 2^{-n})^{1/2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} x_k / 2^{(n+k+1)/2}$$

$$\leqslant u(h + 2h/K)^{1/2} + 2\sum_{k=0}^{\infty}(h/K)^{1/2}(2k + u^2)^{1/2}/2^{k/2}$$

$$\leqslant h^{1/2}[u(1 + 2/K)^{1/2} + 2K^{-1/2}(\beta + u\gamma)]$$

$$= h^{1/2}v,$$

并且当取 $C=K[2(K+1)+\alpha]$时

$$2^{n+1}(2^n h + 1)e^{-u^2/2} + 2^{n+2}e^{-u^2/2}\sum_{k=0}^{\infty}(2/e)^k$$

$$\leqslant K[2(K + 1) + \alpha]h^{-1}e^{-u^2/2}$$

$$\leqslant Ch^{-1}e^{-v^2/(2+\varepsilon)},$$

便得(3.2.4)式.证完.

### 2.2 Csörgö-Revesz 定理

本小节的 Csörgö-Revesz 定理说明了 Wiener 过程的增量有多大,其证明过程较长,需通过若干引理来实现.设$\{W_t, t\geqslant 0\}$是一个 Wiener 过程,$a_T$ 作为 $T$ 的函数定义于$(0,\infty)$,满足

$$0 < a_T \leqslant T. \tag{3.2.6}$$

对每 $T>0$,我们记

$$\beta_T = \left(2a_T \log \frac{T\log T}{a_T}\right)^{-1/2};$$

$$A(T) = \beta_T \sup_{0\leqslant s\leqslant T-a_T} \sup_{0\leqslant t\leqslant a_T} |W_{s+t} - W_s|;$$

$$B(T) = \beta_T |W_T - W_{T-a_T}|;$$

$$C(T) = \beta_T \sup_{0\leqslant s\leqslant T-a_T} |W_{s+a_T} - W_s|;$$

$$D(T) = \beta_T \sup_{0\leqslant t\leqslant a_T} |W_T - W_{T-t}|.$$

不难见下列关系式成立:

$$B(T) \leqslant C(T) \leqslant A(T); \tag{3.2.7}$$

$$B(T) \leqslant D(T) \leqslant A(T). \tag{3.2.8}$$

**引理 3.2.3** 如果 $a_T$ 还满足

$$a_T \text{ 非降}, \tag{3.2.9}$$

$$T/a_T \text{ 非降}, \tag{3.2.10}$$

则下式成立

$$\limsup_{T\to\infty} A(T) \leqslant 1 \quad \text{a.s.}. \tag{3.2.11}$$

**证明** 由(3.2.3)和(3.2.6)易见：对任 $\varepsilon>0$，存在 $C>0$ 使

$$P(A(T) \geqslant (1+\varepsilon)^{1/2}) \leqslant \frac{CT}{a_T}\left(\frac{T\log T}{a_T}\right)^{-\frac{2(1+\varepsilon)}{2+\varepsilon}}$$
$$\leqslant C(\log T)^{-1-\varepsilon/(2+\varepsilon)}$$

对任 $T>0$ 成立. 任取 $\theta>1$ 并令 $T_k=\theta^k, k\geqslant 1$，由上式可见

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A(T_k) \geqslant (1+\varepsilon)^{1/2}) < \infty,$$

从而由 Borel-Cantelli 引理推知

$$\limsup_{k\to\infty} A(T_k) \leqslant 1 \quad \text{a.s.}. \tag{3.2.12}$$

由于 $\beta_T$ 对 $T$ 非增和

$$\beta_T(T\log T)^{1/2} = \left(\frac{T\log T}{a_T}\Big/\log\frac{T\log T}{a_T}\right)^{1/2}$$

对充分大的 $T$ 非降，故

$$1 \leqslant \frac{\beta_{T_k}}{\beta_{T_{k+1}}} \leqslant \left(\frac{T_{k+1}\log T_{k+1}}{T_k\log T_k}\right)^{1/2} = \left[\theta\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^{1/2} < \theta$$

对充分大的 $k$ 成立. 于是，对每 $T>0$，取 $k=k(T)$ 使 $T_k\leqslant T<T_{k+1}$，则利用上式并注意 $\beta_T$ 非增及 $\beta_T^{-1}A(T)$ 非降便知

$$A(T) = \beta_T\beta_T^{-1}A(T) \leqslant \beta_T\beta_{T_{k+1}}^{-1}A(T_{k+1})$$
$$\leqslant \beta_{T_k}\beta_{T_{k+1}}^{-1}A(T_{k+1}) < \theta A(T_{k+1})$$

对充分大的 $T$ 成立. 在上式中令 $T\to\infty$，由(3.2.12)又得

$$\limsup_{T\to\infty} A(T) \leqslant \theta \quad \text{a.s.}.$$

此式再令 $\theta\to 1$，即得(3.2.11)．证完．

**引理 3.2.4** 在引理 3.2.3 相同的条件下，

$$\limsup_{T\to\infty} B(T) \geqslant 1 \quad \text{a.s.}. \tag{3.2.13}$$

**证明** 为证(3.2.13)，只需证存在 $\{T_k, k\geqslant 1\}$ 满足 $T_k\to\infty$，使

$$\limsup_{k\to\infty} B(T_k) \geqslant 1 \quad \text{a.s.}. \tag{3.2.14}$$

如果(3.2.14)中的 $\{T_k, k\geqslant 1\}$ 使

$$T_{k+1} - a_{T_{k+1}} \geqslant T_k \tag{3.2.15}$$

对充分大的 $k$ 成立，那么

$$B(T_k) = \beta_{T_k}|W_{T_k} - W_{T_k} - a_{T_k}|, \quad k \geqslant 1$$

是相互独立的，因而由 Borel-Cantelli 定理知(3.2.14)等价于

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(B(T_k) \geqslant 1 - \varepsilon) = \infty$$

对任给 $\varepsilon\in(0,1)$ 成立．但是，引理 3.2.1 给出

$$\begin{aligned}
P(B(T) \geqslant 1 - \varepsilon) &= 2\left[1 - \Phi\left((1-\varepsilon)\left(2\log\frac{T\log T}{a_T}\right)^{1/2}\right)\right] \\
&\geqslant 2\left[1 - \frac{1}{2(1-\varepsilon)^2\log\dfrac{T\log T}{a_T}}\right] \\
&\quad \cdot \frac{\exp\left[-(1-\varepsilon)^2\log\dfrac{T\log T}{a_T}\right]}{(1-\varepsilon)\left(4\pi\log\dfrac{T\log T}{a_T}\right)^{1/2}} \\
&\geqslant \frac{\left(\dfrac{T\log T}{a_T}\right)^{-(1-\varepsilon)^2}}{\left(\log\dfrac{T\log T}{a_T}\right)^{1/2}} \geqslant \left(\frac{a_T}{T\log T}\right)^{1-\varepsilon}
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

对充分大的 $T$ 成立，故为证(3.2.14)，又归结于证明存在满足 $T_k \to \infty$ 和(3.2.15)之 $\{T_k, k \geqslant 1\}$ 使

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_{T_k}}{T_k \log T_k}\right)^{1-\varepsilon} = \infty \tag{3.2.17}$$

对任给 $\varepsilon \in (0,1)$ 成立. 考虑

$$\rho := \lim_{T\to\infty}\frac{a_T}{T} < 1 \tag{3.2.18}$$

的情况. 由(3.2.6)，(3.2.9)和(3.2.10)易见

$$0 \leqslant a_{T_2} - a_{T_1} = T_2\left(\frac{a_{T_2}}{T_2} - \frac{a_{T_1}}{T_1}\right) + \frac{a_{T_1}}{T_1}(T_2 - T_1) \leqslant T_2 - T_1$$

对任何 $T_1 \leqslant T_2$ 成立，故 $a_T$ 是 $T$ 的连续函数. 此外，当 $T_1$ 充分大时，由(3.2.10)和(3.2.18)又推知

$$(T_2 - a_{T_2}) - (T_1 - a_{T_1}) \geqslant (T_2 - T_1)\left(1 - \frac{a_{T_1}}{T_1}\right) > 0.$$

由此可见，存在 $T_0 > 0$，在 $[T_0, \infty)$ 上 $T - a_T$ 严格增加且连续. 归纳地定义 $\{T_k, k \geqslant 1\}$ 如下：$T_1 = 0$；对任 $k \geqslant 1$，如 $T_k$ 已定义，则令 $T_{k+1}$ 是方程

$$T - a_T = T_k$$

的解. 这样定义的 $\{T_k, k \geqslant 1\}$ 显然是严增序列而且满足(3.2.15). 它还必须满足 $T_k \to \infty$，因为如 $T_k \to T^* < \infty$，则由 $a_T$ 的连续性可推出

$$T^* - a_{T^*} = \lim_{k\to\infty}(T_{k+1} - a_{T_{k+1}}) = \lim_{k\to\infty} T_k = T^*,$$

从而 $a_{T^*} = 0$，而这是不可能的. 于是，我们只需再证 $\{T_k, k \geqslant 1\}$ 满足(3.2.17). 对 $\delta = (1-\rho)/2 > 0$，令

$$K = -\inf_{0 \leqslant x \leqslant 1-\delta}\frac{\log(1-x)}{x}$$

并取 $k_0$ 充分大使当 $k \geqslant k_0$ 时

$$\frac{a_{T_k}}{T_k} < \frac{1+\rho}{2} = 1 - \delta,$$

则我们有

$$\log T_k - \log T_{k_0} = \sum_{i=k_0+1}^{k} \log \frac{T_i}{T_{i-1}} = -\sum_{i=k_0+1}^{k} \log\left(1 - \frac{a_{T_i}}{T_i}\right)$$

$$\leqslant K \sum_{i=k_0+1}^{k} \frac{a_{T_i}}{T_i}$$

从而由(3.2.6)得:当 $k\to\infty$时

$$\sum_{i=k_0+1}^{k}\left(\frac{a_{T_i}}{T_i \log T_i}\right)^{1-\varepsilon} \geqslant \sum_{i=k_0+1}^{k} \frac{a_{T_i}}{T_i} \cdot \frac{1}{(\log T_i)^{1-\varepsilon}} \geqslant \frac{1}{(\log T_k)^{1-\varepsilon}} \sum_{i=k_0+1}^{k} \frac{a_{T_i}}{T_i}$$

$$\geqslant \frac{1}{K}\left[(\log T_k)^{\varepsilon} - \frac{\log T_{k_0}}{(\log T_k)^{1-\varepsilon}}\right] \to \infty.$$

这说明(3.2.17)成立因而当 $\rho<1$ 时(3.2.13)成立.

下面,考虑

$$\lim_{T\to\infty} \frac{a_T}{T} = 1 \tag{3.2.19}$$

的情况.这时由(3.2.6)和(3.2.10)推知对每 $T>0$,$a_T=T$,因而

$$B(T) = \beta_T |W_T|;$$

$$\beta_T = (2T\log\log T)^{1/2}.$$

为证(3.2.13),只需证任给 $\varepsilon\in(0,1)$,存在正数列$\{T_k,k\geqslant 1\}$满足 $T_k\to\infty$且使

$$\limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} |W_{T_{k+1}}| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \text{a.s.}.$$

但是

$$\limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} |W_{T_{k+1}}|$$

$$\geqslant \limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} [|W_{T_{k+1}} - W_{T_k}| - |W_{T_k}|]$$

$$\geqslant \limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} |W_{T_{k+1}} - W_{T_k}| - \limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} |W_{T_k}|,$$

故又只需证

(3.2.20) $\limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} |W_{T_{k+1}} - W_{T_k}|$

$$\geqslant \limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} |W_{T_k}| + 1 - \varepsilon \quad \text{a.s.}.$$

取 $T_k=\theta^k, \theta>1$. 我们有

$$\beta_{T_{k+1}}/\beta_{T_k} \to \theta^{-1/2},$$

因而由已证之(3.2.11)推知

$$\limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}} |W_{T_k}| \leqslant \lim_{k\to\infty} (\beta_{T_{k+1}}/\beta_k) \limsup_{k\to\infty} A(T_k) \leqslant \theta^{-1/2} \quad \text{a.s.}.$$

于是，只需上面的 $\theta$ 满足 $\theta^{-1/2}\leqslant\varepsilon/2$, 下式

(3.2.21) $\qquad \limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k-1}} |W_{T_{k+1}} - W_{T_k}| \geqslant 1 - \varepsilon/2 \quad \text{a.s.}$

就能保证(3.2.20)成立. 利用(3.2.1)并注意

$$\log\log(T_{k+1} - T_k) \to \infty,$$

我们知对 $\delta=\varepsilon/2$, 当 $k$ 充分大时,

$$\begin{aligned} & P(\beta_{T_{k+1}-T_k} |W_{T_{k+1}} - W_{T_k}| \geqslant 1 - \delta) \\ & \quad = 2[1 - \Phi((1-\delta)[2\log\log(T_{k+1} - T_k)]^{1/2})] \\ & \quad \geqslant 2\left[1 - \frac{1}{2(1-\delta)^2\log\log(T_{k+1} - T_k)}\right] \\ & \qquad \times \frac{\exp[-(1-\delta)^2\log\log(T_{k+1} - T_k)]}{(1-\delta)[2\log\log(T_{k+1} - T_k)]^{1/2}} \\ & \quad \geqslant Ck^{-(1-\delta)} \end{aligned}$$

对某 $C>0$ 成立，从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\beta_{T_{k+1}-T_k} |W_{T_{k+1}} - W_{T_k}| \geqslant 1 - \delta) = \infty.$$

根据 Borel-Cantelli 引理，这意味着

$$\limsup_{k\to\infty} \beta_{T_{k+1}-T_k} |W_{T_{k+1}} - W_{T_k}| \geqslant 1 - \delta \quad \text{a.s.}.$$

再注意

$$\beta_{T_{k+1}-T_k}/\beta_{T_{k+1}} \to 1,$$

我们就得到(3.2.21). 这样，我们又在(3.2.19)下证明了(3.2.13). 引理证完.

**引理 3.2.5** 在引理 3.2.3 的条件下，如果

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\log\dfrac{T}{a_T}}{\log\log T}=\infty \tag{3.2.22}$$

成立，则

$$\liminf_{T\to\infty} C(T)\geqslant 1\quad \text{a.s.}. \tag{3.2.23}$$

**证明** 对每 $T>0$，取 $k=k(T)$ 使 $k\leqslant T<k+1$，则对任给 $\delta\in(0,1)$，当 $T$ 充分大因而 $k$ 充分大时有

$$0\leqslant a_T-a_k\leqslant a_k(T-k)/k\leqslant a_k/k\leqslant \delta a_k.$$

因此，对充分大的 $T$，有

$$\begin{aligned}\beta_{k+1}&\max_{0\leqslant i\leqslant[k/a_k]-1}|W_{(i+1)a_k}-W_{ia_k}| \\ &\leqslant\beta_T\max_{1\leqslant i\leqslant[k/a_k]}\sup_{(i-1)a_k\leqslant s\leqslant ia_k}|W_{s+a_k}-W_s| \\ &\leqslant\beta_T\sup_{0\leqslant s\leqslant([k/a_k]-1)a_k}|W_{s+a_T}-W_s| \\ &\quad+\beta_T\max_{1\leqslant i\leqslant[k/a_k]-1}\sup_{(i-1)a_k\leqslant s\leqslant ia_k}|W_{s+a_T}-W_{s+a_k}| \\ &\leqslant C(T)+\beta_T\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta a_T}|W_{s+t+a_k}-W_{s+a_k}|.\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

由于 $\{W_{t+a_k}-W_{a_k},t\geqslant 0\}$ 与 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 同分布，故由 (3.2.12) 推知

$$\begin{aligned}\limsup_{T\to\infty}\beta_T&\sup_{0\leqslant s\leqslant T-\delta a_T}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta a_T}|W_{s+t+a_k}-W_{s+a_k}| \\ &\leqslant\limsup_{T\to\infty}\frac{\left(2\delta a_T\log\dfrac{T\log T}{\delta a_T}\right)^{1/2}}{\left(2a_T\log\dfrac{T\log T}{a_T}\right)^{1/2}}=\delta^{1/2}\quad\text{a.s.}.\end{aligned}$$

另一方面，利用 (3.2.16) 所作之估计，易得

$$\begin{aligned}P\Big(\beta_{k+1}&\max_{0\leqslant i\leqslant[k/a_k]-1}|W_{(i+1)a_k}-W_{ia_k}|\leqslant 1-\delta\Big) \\ &=\left[P(\beta_{k+1}|W_{a_k}|\leqslant 1-\delta)\right]^{[k/a_k]} \\ &=\left\{1-2\left[1-\Phi\left((1-\delta)\left(2\log\frac{k\log k}{a_k}\right)^{1/2}\right)\right]\right\}^{[k/a_k]}\end{aligned}$$

$$\leqslant \left[1 - \left(\frac{a_k}{k\log k}\right)^{1-\delta}\right]^{[k/a_k]}$$

$$= \exp\left\{\left[\frac{k}{a_k}\right]\log\left[1 - \left(\frac{a_k}{k\log k}\right)^{1-\delta}\right]\right\}$$

$$\leqslant \exp\left[-\left(\frac{k}{a_k}\right)^{\delta}\left(\frac{1}{\log k}\right)^{1-\delta}\right]$$

对充分大的 $k$ 成立. 注意(3. 2. 22)蕴含

$$\left(\frac{T}{a_T}\right)^{\delta} \geqslant 2(\log T)^{2-\delta}$$

对充分大的 $T$ 成立,故存在 $k_0$,使

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} P(\beta_{k+1} \max_{0\leqslant i\leqslant[k/a_k]-1} |W_{(i+1)a_k} - W_{ia_k}| \leqslant 1-\delta)$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{k}{a_k}\right)^{\delta}\left(\frac{1}{\log k}\right)^{1-\delta}\right]$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} \exp[-2\log k] = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

于是,由 Borel-Cantelli 引理知对 $k=k(T)$

$$\limsup_{T\to\infty} \beta_{k+1} \max_{0\leqslant i\leqslant[k/a_k]-1} |W_{(i+1)a_k} - W_{ia_k}| \geqslant 1-\delta \quad \text{a.s.}.$$

因此,在(3. 2. 24)二端令 $T\to\infty$,便有

$$1-\delta \leqslant \limsup_{T\to\infty} C(T) + \delta^{1/2} \quad \text{a.s.}.$$

上式再令 $\delta\to 0$ 即得(3. 2. 23). 证完.

现在,我们给出 Csörgö-Revesz 定理的叙述和证明.

**定理 3. 2. 6** 设$\{W_t, t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程,定义在$(0,\infty)$上的函数 $a_T$ 满足(3. 2. 6),(3. 2. 9)和(3. 2. 10),则我们有

$$\text{(3. 2. 25)} \quad \limsup_{T\to\infty} B(T) = \limsup_{T\to\infty} C(T) = \limsup_{T\to\infty} D(T) = \limsup_{T\to\infty} A(T) = 1 \quad \text{a.s.};$$

如果 $a_T$ 还满足(3. 2. 22),则进而有

$$\lim_{T\to\infty} C(T) = \lim_{T\to\infty} A(T) = 1 \quad \text{a.s.}. \tag{3.2.26}$$

**证明** 由(3.2.11),(3.2.13)以及关系式(3.2.7)和(3.2.8)立得(3.2.26). 由(3.2.11),(3.2.23)及(3.2.7)又得(3.2.26). 证完.

### 2.3 Levy 连续模定理

利用 Csörgö-Revesz 定理,我们来证明如下的 Levy 关于 Wiener 过程的连续模定理.

**定理 3.2.7** 对 Wiener 过程$\{W_t, t\geqslant 0\}$,有

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{s+t}-W_s|}{(2h\log h^{-1})^{1/2}} = \lim_{h\to 0}\frac{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1-h}|W_{s+h}-W_s|}{(2h\log h^{-1})^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.}. \tag{3.2.27}$$

**证明** 令 $T=h^{-1}, a_T=1$ 并注意

$$\{W_t, 0\leqslant t\leqslant 1\} \stackrel{d}{=} \{T^{1/2}W_{t/T}, 0\leqslant t\leqslant T\}$$

(命题 3.1.2 之(2))和 $\beta_T(2\log T)^{1/2}\to 1$,由(3.2.26)立得

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1-h}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant h}|W_{s+t}-W_s|}{(2h\log h^{-1})^{1/2}}\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{T^{1/2}\beta_T\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1-T^{-1}}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T^{-1}}|W_{s+t}-W_s|}{T^{1/2}\beta_T(2T^{-1}\log T)^{1/2}}\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{\beta_T\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant T-1}\sup\limits_{0\leqslant v\leqslant 1}T^{1/2}|W_{(u+v)/T}-W_{u/T}|}{\beta_T(2\log T)^{1/2}} = 1\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{\beta_T\sup\limits_{0\leqslant u\leqslant T-1}T^{1/2}|W_{(u+1)/T}-W_{u/T}|}{\beta_T(2\log T)^{1/2}}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1-h}|W_{s+h}-W_s|}{\beta_T(2\log T)^{1/2}} \quad \text{a.s.}.
\end{aligned}$$

证完.

## 习 题 3.2

1. 设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 证明

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-1}|W_{t+1}-W_t|/(2\log T)^{1/2}=1\quad \text{a.s.}.$$

2. 设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 证明

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-C\log T}|W_{t+C\log T}-W_t|/(C\log T)=(2/C)^{1/2}\quad \text{a.s.}$$

对任 $C>0$ 成立.

3. 设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 证明

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T-CT}\frac{|W_{t+CT}-W_t|}{(2CT\log\log T)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.},$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant T-CT}\sup_{0\leqslant t\leqslant CT}\frac{|W_{s+t}-W_s|}{(2CT\log\log T)^{1/2}}=1\quad \text{a.s.}$$

对任何 $0<C\leqslant 1$ 成立.

4. 设$\{W_t,t\geqslant 0\}$是 Wiener 过程. 证明

$$\limsup_{T\to\infty}|W_T|/(2T\log\log T)^{1/2}=1\quad \text{a.s.};$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|W_t|/(2T\log\log T)^{1/2}=1\quad \text{a.s.};$$

$$\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant a\leqslant 1}|W_{aT}|/(2T\log\log T)^{1/2}=1\quad \text{a.s.}.$$

## 第三节 Wiener 过程的重对数律

本节我们将证明 Strassen 关于 Wiener 过程的重对数律. 古典的 Levy 关于 Wiener 过程的重对数将作为其推论而得到.

**引理 3.3.1** 设 $f=\{f(t),0\leqslant t\leqslant 1\}\in C[0,1]$. 则 $f$ 是绝对连续的且

$$\int_0^1[f'(t)]^2\mathrm{d}t\leqslant 1 \tag{3.3.1}$$

成立之充要条件是

$$n\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]^2\leqslant 1 \tag{3.3.2}$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立.

**证明** 由 Schwartz 不等式易见对每 $n\geqslant 1$,

$$n\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]^2=n\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{(i-1)/n}^{i/n}f'(t)\mathrm{d}t\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)/n}^{i/n}[f'(t)]^2\mathrm{d}t=\int_0^1[f'(t)]^2\mathrm{d}t.$$

故必要性成立.

下面证明充分性. 设 $n$ 是一正整数, $(\alpha_1,\beta_1),\cdots,(\alpha_m,\beta_m)$ 是 $[0,1]$ 中互不相交的区间, 对 $h=1,\cdots,m$, 令

$$i_k=\min\{i:i/n\geqslant\alpha_k\};$$

$$j_k=\max\{j:j/n\leqslant\beta_k\}.$$

取 $n$ 充分大使对每 $k=1,\cdots,m$, $j_k>i_k$, 则由 Schwartz 不等式及 (3.3.2), 我们有

$$\sum_{k=1}^{m}\left|f\left(\frac{j_k}{n}\right)-f\left(\frac{i_k}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=i_k+1}^{j_k}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}(j_k-i_k)^{1/2}\left[\sum_{i=i_k+1}^{j_k}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left[\sum_{k=1}^{m}(j_k-i_k)\right]^{1/2}\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=i_{k+1}}^{j_k}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{j_k}{n}-\frac{i_k}{n}\right)\right]^{1/2}\left[n\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left[\sum_{k=1}^{m}(\beta_k-\alpha_k)\right]^{1/2}.$$

利用 $f$ 的连续性又不难见

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|f(\alpha_k)-f\left(\frac{i_k}{n}\right)\right|=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left|f(\beta_k)-f\left(\frac{j_k}{n}\right)\right|=0.$$

因此，在下式

$$\sum_{k=1}^{m}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left|f(\beta_k)-f\left(\frac{j_k}{n}\right)\right|+\sum_{k=1}^{m}\left|f\left(\frac{j_k}{n}\right)-f\left(\frac{i_k}{n}\right)\right|$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\left|f(\alpha_k)-f\left(\frac{i_k}{n}\right)\right|$$

中令 $n\to\infty$ 即得

$$\sum_{k=1}^{m}|f(\beta_k)-f(\alpha_k)|\leqslant\left[\sum_{k=1}^{m}(\beta_k-\alpha_k)\right]^{1/2}.$$

这说明在(3.3.2)之下，$f$ 绝对连续. 再利用 Fatou 引理，又由(3.3.2)推得

$$\int_0^1[f'(t)]^2\mathrm{d}t=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\{n\left[f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]\right\}^2 I_{\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right)}(t)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\liminf_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]^2\leqslant 1.$$

充分性得证. 定理证完.

**引理 3.3.2** 设 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是满足条件

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2=1 \tag{3.3.3}$$

的实数. 对每 $n\geqslant 1$，令

$$S_n=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i[W_{in}-W_{(i-1)n}],$$

则我们有

(3.3.4) $\limsup_{n\to\infty} S_n/(2n\log\log n)^{1/2}=1$ a.s.;

(3.3.5) $\liminf_{n\to\infty} S_n/(2n\log\log n)^{1/2}=-1$ a.s..

**证明** 我们先证

(3.3.6) $\limsup_{n\to\infty} |S_n|/(2n\log\log n)^{1/2}\leqslant 1$ a.s..

给定 $\theta>1$. 对每 $k\geqslant 1$，令 $n_k=[\theta^k]$. 注意 $S_n/n^{1/2}$ 具有标准正态分布，由(3.2.1)易见对任给 $\varepsilon>0$，

$$P\left(\left|S_{n_k}\right|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}\geqslant 1+\varepsilon\right)$$
$$\leqslant \exp[-(1+\varepsilon)^2\log\log n_k]$$
$$\leqslant C(k\log\theta)^{-(1+\varepsilon)^2}$$

当 $n$ 充分大时对某 $C>0$ 成立. 于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|S_{n_k}\right|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}\geqslant 1+\varepsilon\right)<\infty.$$

据 Borel-Cantelli 引理，这表明

$$\limsup_{k\to\infty}\left|S_{n_k}\right|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}\leqslant 1 \quad \text{a.s.}.$$

此外，由引理 3.2.3 可得

$$\limsup_{k\to\infty}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|W_{in}-W_{in_k}\right|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}$$
$$\leqslant\limsup_{k\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant mn_k}\sup_{0\leqslant t\leqslant m(n_{k+1}-n_k)}\left|W_{s+t}-W_s\right|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}$$
$$\leqslant\limsup_{k\to\infty}\left[m(n_{k+1}-n_k)\log\frac{n_{k+1}\log mn_{k+1}}{n_{k+1}-n_k}\right]^{1/2}/(n_k\log\log n_k)^{1/2}$$
$$=[m(\theta-1)]^{1/2} \quad \text{a.s.},$$

从而

$$\limsup_{k\to\infty}\max_{n_k\leqslant n<n_{k+1}}\left|S_n-S_{n_k}\right|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}$$
$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{m}\limsup_{k\to\infty}\max_{n_k\leqslant n<n_{k+1}}\left|W_{in}-W_{in_k}\right|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}$$
$$\leqslant 2m[m(\theta-1)]^{1/2} \quad \text{a.s.}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}|S_n|/(2n\log\log n)^{1/2}\\
&\leqslant \limsup_{k\to\infty}\max_{n_k\leqslant n<n_{k+1}}|S_n|/(2n\log\log n)^{1/2}\\
&\leqslant \limsup_{k\to\infty}|S_{n_k}|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}\\
&\quad+\limsup_{k\to\infty}\max_{n_k\leqslant n<n_{k+1}}|S_n-S_{n_k}|/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}\\
&\leqslant 1+2m[m(\theta-1)]^{1/2}\quad \text{a.s.}.
\end{aligned}$$

在上式中令 $\theta\to 1$. 就得(3.3.6).

下面再证

$$(3.3.7)\qquad \limsup_{n\to\infty}S_n/(2n\log\log n)^{1/2}\geqslant 1\quad \text{a.s.}.$$

为此，只需证：对任给 $\delta\in(0,1)$，存在子列 $\{n_k\}$ 使得

$$(3.3.8)\qquad \limsup_{k\to\infty}S_{n_k}/(2n_k\log\log n_k)^{1/2}\geqslant 1-\delta\quad \text{a.s.}.$$

取 $\varepsilon\in(0,1)$ 使 $(1-\varepsilon)^{3/2}-\varepsilon^{1/2}>1-\delta$，再令 $n_k=([m/\varepsilon]+1)^k$, $k\geqslant 1$. 由于 $n_k/n_{k-1}=[m/\varepsilon]+1>m$，故

$$S_k^*:=S_{n_k}-\alpha_1 W_{mn_{k-1}},\quad k\geqslant 1$$

是相互独立的. 又注意

$$\begin{aligned}
E(S_k^*)^2&=E\Big[\alpha_1(W_{n_k}-W_{mn_{k-1}})+\sum_{i=2}^m\alpha_i(W_{in_k}-W_{(i-1)n_k})\Big]^2\\
&=\alpha_1^2(n_k-mn_{k-1})+(\alpha_2^2+\cdots+\alpha_m^2)n_k\\
&=n_k-\alpha_1^2mn_{k-1}\geqslant n_k(1-\varepsilon),
\end{aligned}$$

由(3.2.1)我们知

$$\begin{aligned}
&P(S_k^*/[2n_k(1-\varepsilon)\log\log n_k]^{1/2}\geqslant 1-\varepsilon)\\
&\quad\geqslant 1-\Phi(2(1-\varepsilon)\log\log n_k)\\
&\quad\geqslant C\big[k^{(1-\varepsilon)^2}\log k\big]^{-1}
\end{aligned}$$

当 $k$ 充分大时对某 $C>0$ 成立，从而

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left( S_k^* /(2n_k \log\log n_k)^{1/2} \geqslant (1-\varepsilon)^{3/2} \right) = \infty.$$

于是，由 Borel-Cantelli 引理推知

$$\limsup_{k\to\infty} S_k^* /(2n_k \log\log n_k)^{1/2} \geqslant (1-\varepsilon)^{3/2} \quad \text{a.s.}.$$

另一方面，由(3.2.25)易得(参见习题 3.2 之 1)

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \alpha_1 W_{mn_{k-1}} \right| /(2n_k \log\log n_k)^{1/2} \leqslant \varepsilon^{1/2} \quad \text{a.s.},$$

这样，就得到

$$\begin{aligned} &\limsup_{k\to\infty} S_{n_k} /(2n_k \log\log n_k)^{1/2} \\ &\geqslant \limsup_{k\to\infty} S_k^* /(2n_k \log\log n_k)^{1/2} + \liminf_{k\to\infty} \alpha_1 W_{mn_{k-1}} /(2n_k \log\log n_k)^{1/2} \\ &\geqslant (1-\varepsilon)^{3/2} - \varepsilon^{1/2} \geqslant 1 - \delta \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

(3.3.8)得证. (3.3.7)亦得证.

由(3.3.6)和(3.3.7)立得(3.3.4). 把(3.3.4)用于 Wiener 过程$\{-W_t, t\geqslant 0\}$又得到(3.3.5). 引理证完.

为了叙述简洁，引进下列符号. 对于完备可分距离空间 $X$ 中的相对紧序列$\{x_n\}$，以 $C(\{x_n\})$表示$\{x_n\}$的全部极限点. 对于概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$到 $X$ 的随机元 $\xi_n$ 和 $X$ 中的集合 $A$，以记号

$$C(\{\xi_n\}) = A \quad \text{a.s.}$$

表示存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$, $P(\Omega_0)=1$，使得对每 $\omega \in \Omega_0$，序列$\{\xi_n(\omega), n\geqslant 1\}$是相对紧的而且 $C(\{\xi_n(\omega)\}) = A$. 此外，我们把 $C[0,1]$中满足 $\int_0^1 [f'(t)]^2 \mathrm{d}t \leqslant 1$ 的全体绝对连续函数组成之集记成 $\mathscr{K}$，利用上述符号，Strassen 关于 Wiener 过程的重对数律可以叙述和证明如下.

**定理 3.3.3** 设$\{W_t, t\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的 Wiener 过程. 对每 $n\geqslant 1$，令

$$\zeta_n = \{\zeta_{n,t} := W_{nt}/(2n\log\log n)^{1/2}, 0\leqslant t\leqslant 1\},$$

则对于取值于 $C[0,1]$的随机元列$\{\zeta_n, n\geqslant 1\}$有

(3.3.9) $$C(\{\zeta_n\}) = \mathscr{K} \quad \text{a.s.}.$$

**证明** 我们把证明分为三步.

**第一步** 任给 $m \geqslant 1$，定义随机向量序列

$$Z_n^{(m)} = \begin{pmatrix} W_n \\ W_{2n} - W_n \\ \vdots \\ W_{mn} - W_{(m-1)n} \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1.$$

我们首先证明$\{Z_n^{(m)}, n \geqslant 1\}$作为 $\boldsymbol{R}^m$ 中的随机元序列满足

(3.3.10) $$C(\{Z_n^{(m)}/(2n\log\log n)^{1/2}\}) = \{\alpha \in \boldsymbol{R}^m : \alpha'\alpha \leqslant 1\}.$$

根据引理 3.3.2，存在一个 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$，$P(\Omega_0) = 1$ 使得当 $\omega \in \Omega_0$ 时

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha' Z_n^{(m)}(\omega)/(2n\log\log n)^{1/2} = 1$$

和

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha' Z_n^{(m)}(\omega)/(2n\log\log n)^{1/2} = -1$$

对一切满足 $\alpha'\alpha = 1$ 的有理向量 $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$（即分量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 均为有理数的向量）成立；特别地，对每 $i = 1, \cdots, m$，有

$$\limsup_{n\to\infty} [W_{in}(\omega) - W_{(i-1)n}(\omega)]/(2n\log\log n)^{1/2} = 1;$$

$$\liminf_{n\to\infty} [W_{in}(\omega) - W_{(i-1)n}(\omega)]/(2n\log\log n)^{1/2} = -1.$$

由此可见，当 $\omega \in \Omega_0$ 时，$\{Z_n^{(m)}(\omega)/(2n\log\log n)^{1/2}, n \geqslant 1\}$在 $\boldsymbol{R}^m$ 中相对紧并且如对某 $t \in \boldsymbol{R}^m$，有子列$\{n'\}$使

(3.3.11) $$Z_{n'}^{(m)}(\omega)/(2n'\log\log n')^{1/2} \to t,$$

则对一切满足 $\alpha'\alpha = 1$ 的有理向量 $\alpha$ 均有 $\alpha' t \leqslant 1$ 从而 $t't \leqslant 1$. 这样，我们就证明了

(3.3.12) $$C(\{Z_n^{(m)}(\omega)/(2n\log\log n)^{1/2}\}) \subset \{\alpha \in \boldsymbol{R}^m : \alpha'\alpha \leqslant 1\}, \quad \omega \in \Omega_0.$$

另一方面，如果 $\alpha \in \boldsymbol{R}^m$ 满足 $\alpha'\alpha = 1$，那么对任 $\omega \in \Omega_0$，一定存

在子列$\{n'\}$使

$$\alpha' Z_{n'}^{(m)}(\omega)/(2n'\log\log n')^{1/2} \to 1$$

成立以及(3.3.11)对某 $t\in \boldsymbol{R}^m$ 成立,从而 $\alpha' t = 1$. 但是,由(3.3.12)知 $t't\leqslant 1$,故此时必有 $t=\alpha$. 由此可见

$$\{\alpha \in \boldsymbol{R}^m: \alpha'\alpha = 1\} \subset C(\{Z_n^{(m)}(\omega)/(2n\log\log n)^{1/2}\}), \quad \omega \in \Omega_0.$$

于是,我们有

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m+1}: \alpha \in \boldsymbol{R}^m, \alpha'\alpha \leqslant 1\right\}$$

$$\subset \{\alpha \in \boldsymbol{R}^{m+1}: \alpha'\alpha = 1\}$$

$$\subset C(\{Z_n^{(m+1)}(\omega)/(2n\log\log n)^{1/2}\}), \quad \omega \in \Omega_0.$$

显然,这说明

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{m+1}: \alpha \in \boldsymbol{R}^m, \alpha'\alpha \leqslant 1\right\}$$

$$\subset C\left[\left\{\begin{bmatrix}Z_n^{(m)}(\omega)\\0\end{bmatrix}\Big/(2n\log\log n)^{1/2}\right\}\right], \quad \omega \in \Omega_0,$$

亦即

(3.3.13) $\{\alpha \in \boldsymbol{R}^m: \alpha'\alpha \leqslant 1\}$

$$\subset C(\{Z_n^{(m)}(\omega)/(2n\log\log n)^{1/2}\}), \quad \omega \in \Omega_0.$$

把(3.3.12)和(3.3.13)合在一起即得(3.3.10).

**第二步** 对每 $f\in C[0,1]$和 $m\geqslant 1$,以 $f^{(m)}$记依次连接$(i/m, f(i/m))$, $i=0,1,\cdots,m$ 的折线,即对 $i=0,1,\cdots,m$,当 $t\in[i/m,(i-1)/m]$时,令

$$f^{(m)}(t) = f\left(\frac{i}{m}\right) + (mt-i)\left[f\left(\frac{i+1}{m}\right) - f\left(\frac{i}{m}\right)\right].$$

再对每 $m\geqslant 1$,记

$$\mathscr{K}_m = \{f^{(m)}: f \in \mathscr{K}\}.$$

我们将证明

(3.3.14) $$C(\{\zeta_n^{(m)}\}) = \mathscr{K}_m \quad \text{a.s.}.$$

设 $f, f_n \in C[0,1], n \geqslant 1$. 对任意固定的 $m \geqslant 1$，记

$$v_n^{(m)} = \begin{pmatrix} f_n(1/m) \\ f_n(2/m) - f_n(1/m) \\ \cdots\cdots \\ f_n(1) - f_n(1 - 1/m) \end{pmatrix}, \quad n \geqslant 1;$$

$$v^{(m)} = \begin{pmatrix} f(1/m) \\ f(2/m) - f(1/m) \\ \cdots\cdots \\ f(1) - f(1 - 1/m) \end{pmatrix}.$$

易见 $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ 等价于

$$f_n(i/m) - f_n((i-1)/m) \to f(i/m) - f((i-1)/m),$$
$$i = 1, \cdots, m,$$

等价于

$$v_n^{(m)} \to v^{(m)}.$$

因此，$\{f_n^{(m)}, n \geqslant 1\}$ 在 $C[0,1]$ 中是相对紧的当且仅当 $\{v_n^{(m)}, n \geqslant 1\}$ 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中相对紧；而由引理 3.3.1 又进而推知

$$C(\{f_n^{(m)}\}) = \mathscr{K}_m$$

当且仅当

$$C(\{v_n^{(m)}\}) = \{\alpha \in \boldsymbol{R}^m : m\alpha'\alpha \leqslant 1\}.$$

这说明(3.3.14)等价于

$$(3.3.15) \quad C\left(\left\{\begin{pmatrix} \zeta_{n,m^{-1}} \\ \zeta_{n,2m^{-1}} - \zeta_{n,m^{-1}} \\ \cdots\cdots \\ \zeta_{n,1} - \zeta_{n,1-m^{-1}} \end{pmatrix}\right\}\right) = \{\alpha \in \boldsymbol{R}^m : m\alpha'\alpha \leqslant 1\} \quad \text{a.s.}.$$

注意

$$\{m^{1/2}\zeta_{n,t}, 0 \leqslant t \leqslant 1\} \overset{d}{=} \{W_{nmt}/(2n\log\log n)^{1/2}, 0 \leqslant t \leqslant 1\},$$

故(3.3.15)又等价于(3.3.10)．(3.3.14)．证毕.

第三步　(3.3.9)的证明.

任给 $m\geqslant 1$,由(3.2.25)得

$$(3.3.16)\qquad \limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\zeta_{n,t}-\zeta_{n,t}^{(m)}\right|$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant n-n/m}\sup_{0\leqslant t\leqslant n/m}\left|W_{s+t}-W_s\right|/(2n\log\log n)^{1/2}$$

$$\leqslant 1/m^{1/2}\quad \text{a.s.}.$$

对每 $m\geqslant 1$,取 $\Omega_m\in\mathscr{F}$,$P(\Omega_m)=1$　使 $\omega\in\Omega_m$ 时,

$$(3.3.17)\qquad \{\zeta_n^{(m)}(\omega),n\geqslant 1\}\text{ 相对紧};$$

$$(3.3.18)\qquad C(\{\zeta_n^{(m)}(\omega)\})=\mathscr{K}_m;$$

$$(3.3.19)\qquad \limsup_{n\to\infty}d_C(\zeta_n(\omega),\zeta_n^{(m)}(\omega))\leqslant m^{-1/2}.$$

令 $\Omega^*=\bigcap_{m=1}^{\infty}\Omega_m$,则 $\Omega^*\in\mathscr{F}$,$P(\Omega^*)=1$ 而且当 $\omega\in\Omega^*$ 时(3.3.17)—(3.3.19)对每 $m\geqslant 1$ 成立.

任意给定 $\omega\in\Omega^*$.由于(3.3.17)和(3.3.18)对每 $m\geqslant 1$ 成立,故对 $\{n\}$ 的任一子列,一定可以取到该子列之子列 $\{n'\}$ 和 $\{f_m\in\mathscr{K}_m,m\geqslant 1\}$ 使

$$\zeta_{n'}^{(m)}(\omega)\to f_m,\quad m\geqslant 1.$$

不难见 $\{f_m,m\geqslant 1\}$ 必须满足:

$$f_{2^{k+1}}^{(2^k)}=f_{2^k},\quad k\geqslant 1.$$

因此我们有

$$d_C(f_{2^{k+1}},f_{2^k})\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{2^{k+1}}[f_{2^{k+1}}(i/2^{k+1})-f_{2^{k+1}}((i-1)/2^{k+1})]^2\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant 2^{-(k+1)/2}.$$

但是,$\mathscr{K}$ 是 $C[0,1]$ 中之闭集.因此,存在 $f\in\mathscr{K}$ 使 $d_C(f_{2^k},f)\to 0$.于是,在不等式

$$d_C(\zeta_{n'}(\omega),f)\leqslant d_C(\zeta_{n'}(\omega),\zeta_{n'}^{(2^k)}(\omega))$$

$$+d_C(\zeta_{n'}^{(2^k)}(\omega),f_{2^k})+d_C(f_{2^k},f)$$

中先令 $n'\to\infty$，再令 $k\to\infty$，就得到

$$\lim_{n'\to\infty} d_C(\zeta_{n'}(\omega),f) = 0. \tag{3.3.20}$$

这样，我们就证明了当 $\omega\in\Omega^*$ 时，$\{\zeta_n(\omega),n\geqslant 1\}$ 相对紧而且

$$C(\{\zeta_n(\omega)\})\subset\mathscr{K}.$$

反之，任给 $f\in\mathscr{K}$，总有 $f^{(m)}\to f$. 因当 $\omega\in\Omega^*$ 时，(3.3.17)对每 $m\geqslant 1$ 成立，故总可以取到 $\{n\}$ 的子列 $\{n'\}$ 使

$$\zeta_{n'}^{(m)}(\omega)\to f^{(m)},\quad m\geqslant 1.$$

于是，在不等式

$$d_C(\zeta_{n'}(\omega),f)\leqslant d_C(\zeta_{n'}(\omega),\zeta_{n'}^{(m)}(\omega)) + d_C(\zeta_{n'}^{(m)}(\omega),f^{(m)}) + d_C(f^{(m)},f)$$

中先令 $n'\to\infty$，再令 $m\to\infty$，就知(3.3.20)成立. 这又说明了

$$\mathscr{K}\subset C(\{\zeta_n(\omega)\}),\quad \omega\in\Omega_0.$$

(3.3.9)证完. 定理证完.

## 习　题　3.3

1. 设 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程. 证明

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{W_T}{(2T\log\log T)^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.};$$

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{W_T}{(2T\log\log T)^{1/2}} = -1 \quad \text{a.s.}.$$

2. 设 $f$ 是 $[0,\infty)$ 上定义的函数，$a\in\boldsymbol{R}$ 称为 $f$ 的极限点，如存在 $T_n\to\infty$ 使 $f(T_n)\to a$. 证明：如果 $\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是 Wiener 过程，则

$$C(\{W_T/(2T\log\log T)^{1/2}\}) = [-1,1] \quad \text{a.s.},$$

也就是说，存在可测集 $\Omega_0$，$P(\Omega_0)=1$ 使

(1) 对每 $\omega\in\Omega_0$，如果 $a$ 是 $\{W_T(\omega)/(2T\log\log T)^{1/2},T\geqslant 0\}$ 的极限点，则 $a\in[-1,1]$.

(2) 对任 $\omega\in\Omega_0$，每 $a\in[-1,1]$ 必是

$$\{W_T(\omega)/(2T\log\log T)^{1/2},T\geqslant 0\}$$

的极限点.

## 第四节 Skorokhod 嵌入定理

Skorokhod 嵌入定理是概率论中具有重要意义的一个深刻结果,它可以叙述如下.

**定理 3.4.1** 对任一满足条件

$$\int_R t\mathrm{d}F(t) = 0 \tag{3.4.1}$$

和条件

$$\int_R t^2\mathrm{d}F(t) = 1 \tag{3.4.2}$$

之 d.f. $F$,存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$,在它上面定义了一个适 Wiener 过程$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$以及子 $\sigma$ 域族$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的一个 a.s. 有限的停时序列$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$使得(约定 $\tau_0=0$)

(1) $\{\tau_n-\tau_{n-1},n\geqslant 1\}$i.i.d. 且 $E\tau_1=1$;

(2) $\{W_{\tau_n}-W_{\tau_{n-1}},n\geqslant 1\}$i.i.d. 且 $W_{\tau_1}\sim F$.

给定一个 i.i.d. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$,它满足

$$E\xi_1 = 0;\quad E\xi_1^2 = 1.$$

以 $F$ 记 $\xi_1$ 的 d.f.,则 $F$ 满足(3.4.1)和(3.4.2).因此,根据定理 3.4.1,可以找到一个适 Wiener 过程$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$和一个$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的有限停时序列$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$使定理 3.4.1 的结论(1)和(2)成立.不难见定理的结论(2)意味着

$$\{\xi_n,n\geqslant 1\}\overset{d}{=}\{W_{\tau_n}-W_{\tau_{n-1}},n\geqslant 1\}.$$

这里记号$\overset{d}{=}$表示它两端的随机元同分布.正是在这个意义上,我们说 r.v. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$被嵌入到 Wiener 过程$\{W_t,t\geqslant 0\}$中去了.

定理 3.4.1 的证明过程比较长,我们把它分成几步来实现.令

$$S = \{(u,v):u\leqslant 0 < v\}.$$

对任何 $u<0<v$，以 $G_{u,v}$ 记以概率 $v/(v-u)$ 和 $-u/(v-u)$ 分别取值于直线上二点 $u$ 和 $v$ 的两点分布 r.v. 的 d.f.，即

$$G_{u,v}(x)=\begin{cases}0, & x<u,\\ v/(v-u), & u\leqslant x<v,\\ 1, & x\geqslant v;\end{cases} \tag{3.4.3}$$

又对 $u=0<v$，约定 $G_{u,v}$ 为在 0 那点的退化 d.f.. 这样，对每 $(u,v)\in S$，$G_{u,v}$ 均有定义而且有统一的表达式(3.4.3). 我们先说明 d.f. $G_{u,v}$ 与 Wiener 过程之间的联系.

**引理 3.4.2** 设 $W=\{W_t,t\geqslant 0\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 Wiener 过程. 对每 $t\geqslant 0$，令

$$\mathscr{F}_t=\sigma\{W_s,0\leqslant s\leqslant t\},$$

又对任 $(u,v)\in S$，令

$$\tau=\tau(u,v,W):=\inf\{t:W_t\notin(u,v)\}$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$). 则下列结论成立：

(1) $\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$ 的 a.s. 有限的停时；

(2) $W_\tau\sim G_{u,v}$；

(3) $E\tau=EW_\tau^2=-uv$.

**证明** 易见 $\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$ 的停时，由命题 3.1.3 又知 $\tau$ 是 a.s. 有限的，故(1)成立. 当 $u=0<v$ 时，由定义即知 $\tau\equiv 0$ 从而(2)和(3)显然成立. 因此，我们只需再证当 $u<0<v$ 时(2)和(3)成立. 容易验证 $\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$ 和 $\tau$ 满足定理 2.2.20 的条件，故我们有

$$EW_\tau=EW_0=0.$$

但是，$W_\tau$ 只能 a.s. 地取两个值 $u$ 和 $v$，故由上式易解出 $W_\tau$ 取值 $u$ 和 $v$ 的概率分别是 $v/(v-u)$ 和 $-u/(v-u)$. 这说明结论(2)成立. 注意 $\{W_t^2-t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$ 仍满足定理 2.2.20 的条件，故我们又有

$$E(W_\tau^2-\tau)=EW_0^2=0.$$

这样，又得到

$$E\tau = EW_\tau^2 = u^2v/(v-u) - v^2u/(v-u) = -uv,$$

即结论(3)成立. 证完.

我们再来建立任一满足(3.4.1)的 d.f. $F$ 与 d.f. 族

$$\{G_{u,v}:(u,v)\in S\}$$

的联系. 这种联系一旦建立, 那么通过引理 3.4.2 就可以把 $F$ 与 Wiener 过程挂上钩, 以利于嵌入的进行.

**引理 3.4.3** 对任一满足(3.4.1)的非退化 d.f. $F$, 存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$和它上面定义的 r.v. $U$ 和 $V$, 使下列两式成立:

(3.4.4) $$P((U,V)\in S)=1;$$

(3.4.5) $$EG_{U,V}(t)=F(t),\quad t\in \boldsymbol{R}.$$

**证明** 记

$$\alpha=-\int_{(-\infty,0]}t\mathrm{d}F(t)=\int_{(0,\infty)}t\mathrm{d}F(t).$$

由于 $F$ 非退化, 故 $\alpha>0$. 又由于

$$\iint\limits_{(u,v)\in S}v\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)=\int_{(0,\infty)}v\mathrm{d}F(v)\int_{(-\infty,0]}\mathrm{d}F(u)=\alpha F(0)$$

和

$$\iint\limits_{(u,v)\in S}u\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)=\int_{(-\infty,0]}u\mathrm{d}F(u)\int_{(0,\infty)}\mathrm{d}F(v)=-\alpha[1-F(0)],$$

故

$$\iint\limits_{(u,v)\in S}(v-u)\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)=\alpha F(0)+\alpha[1-F(0)]=\alpha.$$

于是,

$$H(x,y)=\alpha^{-1}\iint\limits_{\substack{u\leqslant x,v\leqslant y\\(u,v)\in S}}(v-u)\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v),\quad x,y\in\boldsymbol{R}$$

确定了一个二元 d.f.. 构造一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$使它上面定义的 r.v. $U$ 和 $V$ 满足

$$(U,V)\sim H,$$

则易见$(U,V)$满足(3.4.4).此外,对任何$t\in\mathbf{R}$有

$$EG_{U,V}(t)=E\frac{V}{V-U}I_{\{U\leqslant t<V\}}+EI_{\{V\leqslant t\}}$$

$$=\alpha^{-1}\Big[\iint\limits_{\substack{u\leqslant 0<v\\ u\leqslant t<v}} v\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)+\iint\limits_{\substack{u\leqslant 0<v\\ v\leqslant t}}(v-u)\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)\Big]$$

$$=\alpha^{-1}\Big[\iint\limits_{u\leqslant 0<v} v\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)-\iint\limits_{t<u\leqslant 0<v} v\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)$$

$$-\iint\limits_{u\leqslant 0<v\leqslant t} u\mathrm{d}F(u)\mathrm{d}F(v)\Big]$$

$$=\alpha^{-1}\{\alpha F(0)-\alpha[F(0)-F(t)]\wedge 0-\alpha[F(0)-F(t)]\vee 0\}$$

$$=F(t).$$

故(3.4.5)亦成立.证完.

下面,我们把引理3.4.2与具有性质(3.4.4)和(3.4.5)的随机向量$(U,V)$结合起来,以阐明满足(3.4.1)和(3.4.2)之d.f. $F$与Wiener过程之联系.

**引理3.4.4** 设$W=\{W_t,t\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的Wiener过程,$(U,V)$是同一空间上与$W$独立的r.v.,满足(3.4.4)并且使(3.4.5)对某一$F$成立.令

$$\mathscr{F}_t=\sigma(U,V;W_s,0\leqslant s\leqslant t),\quad t\geqslant 0;$$

$$\tau=\tau(U,V,W)=\inf\{t:W_t\notin(U,V)\}$$

(约定$\inf\varnothing=\infty$).则

(1) $F$是一个d.f.;

(2) $\tau$是$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的a.s.有限的停时;

(3) 下列关系式成立:

$$W_\tau\sim F; \tag{3.4.6}$$

$$E\tau=EW_\tau^2=\int_{\mathbf{R}}x^2\mathrm{d}F(x). \tag{3.4.7}$$

**证明** 结论(1)和(2)是显然的.往证(3).以$H$记$(U,V)$的

d. f.. 由于$(U,V)$与 $W$ 独立并且满足(3.4.4)和(3.4.5),利用引理 3.4.2 之(2)可得

$$\begin{aligned}P(W_\tau \leqslant x) &= \iint_{(u,v)\in S} P(W_{\tau(u,v,W)} \leqslant x)\mathrm{d}H(u,v)\\ &= \iint_{(u,v)\in S} G_{u,v}(x)\mathrm{d}H(u,v)\\ &= EG_{U,V}(x) = F(x).\end{aligned}$$

因此(3.4.6)成立.类似地,利用引理 3.4.2 之(3)又可得

$$\begin{aligned}E\tau(U,V,W) &= \iint_{(u,v)\in S} E\tau(u,v,W)\mathrm{d}H(u,v)\\ &= \iint_{(u,v)\in S} -uv\mathrm{d}H(u,v)\\ &= \iint_{(u,v)\in S}\left[\int_{R} x^2 G_{u,v}(\mathrm{d}x)\right]\mathrm{d}H(u,v)\\ &= \int_{R} x^2\mathrm{d}F(x),\end{aligned}$$

从而(3.4.7)亦成立.证完.

现在,我们可以完成定理 3.4.1 的证明.事实上,我们将证明一个更一般的结论——定理 3.4.5,而定理 3.4.1 是它的一个特殊情形.

**定理 3.4.5** 对任一满足(3.4.1)之 d. f. $F$,存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$,在它上面定义着一个适 Wiener 过程$\{W_t,\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$以及$\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$的一个 a. s. 有限的停时序列$\{\tau_n,n\geqslant 1\}$使得(约定$\tau_0=0$)

(1) $\{\tau_n-\tau_{n-1},n\geqslant 1\}$ i. i. d. 且

$$E\tau_1=\int_{R} x^2\mathrm{d}F(x); \tag{3.4.8}$$

(2) $\{W_{\tau_n}-W_{\tau_{n-1}},n\geqslant 1\}$ i. i. d. 且

$$W_{\tau_1} \sim F. \tag{3.4.9}$$

**证明** 由引理 3.4.3 易知：存在概率空间$(X, \mathscr{B}, \mu)$和它上面定义的 i. i. d. 的随机向量列$\{(\hat{U}_n, \hat{V}_n), n \geqslant 1\}$使对每$n \geqslant 1$，下列两式成立：

$$\mu((\hat{U}_n, \hat{V}_n) \in S) = 1;$$

$$E_\mu G_{\hat{U}_n \hat{V}_n}(t) = F(t), \quad t \in \boldsymbol{R},$$

其中$E_\mu$表示$(X, \mathscr{B}, \mu)$上的期望算子. 又以$\nu$记$(C[0, \infty), \mathscr{R}_C[0, \infty))$上的 Wiener 测度. 令

$$\Omega = X \times C[0, \infty);$$

$$\mathscr{F} = \mathscr{B} \times \mathscr{R}_C[0, \infty);$$

$$P = \mu \times \nu.$$

又对每$x \in X, y \in C[0, \infty)$，令

$$U_n(x, y) = \hat{U}_n(x), \quad n \geqslant 1;$$

$$V_n(x, y) = \hat{V}_n(x), \quad n \geqslant 1;$$

$$W(x, y) = y.$$

易见：$W$是$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的 Wiener 过程；$\{(U_n, V_n), n \geqslant 1\}$是同一概率空间 i. i. d. 的与$W$独立的随机向量序列而且对每$n \geqslant 1$，

$$P((U_n, V_n) \in S) = 1$$

以及

$$EG_{U_n, V_n}(t) = F(t), \quad t \in \boldsymbol{R}$$

成立. 再令

$$\mathscr{F}_t = \sigma((U_n, V_n), n \geqslant 1; W_s, 0 \leqslant s \leqslant t), \quad t \geqslant 0,$$

则不难见$\{W_t, \mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$是一个适 Wiener 过程. 下面，我们将归纳地定义 r. v. 序列$\{\tau_n, n \geqslant 1\}$，证明它是$\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$的 a. s. 有限的停时序列并且使定理的结论(1)和(2)成立.

对每$n \geqslant 1$和$t \geqslant 0$，记

$$\mathscr{F}_t^{(n)} = \sigma((U_k, V_k), 1 \leqslant k \leqslant n; W_s, 0 \leqslant s \leqslant t).$$

令

$$\tau_1 = \inf\{t \geqslant 0; W_t \notin (U_1, V_1)\}.$$

由引理 3.4.4 可知 $\tau_1$ 是 $\{\mathscr{F}_t^{(1)}, t\geqslant 0\}$ 的 a.s. 有限的停时并且 (3.4.8)和(3.4.9)成立. 设对某 $k\geqslant 1$,存在 $\tau_1,\cdots,\tau_k$ 使得

A. 对 $i=1,\cdots,k$,$\tau_i$ 是$\{\mathscr{F}_t^{(i)}, t\geqslant 0\}$的 a.s. 有限停时;

B. $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \cdots, \tau_k-\tau_{k-1}$独立同分布;

C. $W_{\tau_1}, W_{\tau_2}-W_{\tau_1}, \cdots, W_{\tau_k}-W_{\tau_{k-1}}$独立同分布.

令

$$\tau_{k+1} = \inf\{t \geqslant \tau_k; W_t - W_{\tau_k} \notin (U_{k+1}, V_{k+1})\}.$$

我们往证

a. $\tau_{k+1}$是$\{\mathscr{F}_t^{(k+1)}, t\geqslant 0\}$的 a.s. 有限停时.

由命题 1.2.7,$W_{\tau_k}$关于 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$可测,又对每 $s\geqslant 0$,$W_s$ 关于 $\mathscr{F}_s^{(k)}$ 可测,但 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)} \subset \mathscr{F}_{\tau_k\vee s}^{(k+1)}$,$\mathscr{F}_s^{(k)} \subset \mathscr{F}_{\tau_k\vee s}^{(k+1)}$,故 $W_s-W_{\tau_k}$关于 $\mathscr{F}_{\tau_k\vee s}^{(k+1)}$ 可测. 再注意 $V_{k+1}$关于 $\mathscr{F}_{\tau_k\vee s}^{(k+1)}$ 可测,我们知 $W_s-W_{\tau_k}-V_{k+1}$关于 $\mathscr{F}_{\tau_k\vee s}^{(k+1)}$可测. 于是,对每 $\varepsilon>0$ 和每 $0\leqslant s\leqslant t<\infty$,有

$$\{\tau_k \leqslant s, W_s - W_{\tau_k} > V_{k+1} - \varepsilon\} \in \mathscr{F}_s^{(k+1)} \subset \mathscr{F}_t^{(k+1)}.$$

对任 $t\geqslant 0$,以 $D_t$ 记$[0,t]$中的一个可数稠集,则由上式推知

$$(3.4.10)\quad \{\tau_{k+1} \leqslant t, W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k} > y\}$$
$$= \bigcap_{\varepsilon\in D_t} \bigcup_{s\in D_t} \{\tau_k \leqslant s, W_s - W_{\tau_k} > V_{k+1} - \varepsilon\}$$
$$\cap \{V_{k+1} > y\}$$
$$\in \mathscr{F}_t^{(k+1)}$$

对每 $y>0$ 成立,从而

$$\{\tau_{k+1} \leqslant t, W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k} > 0\} \in \mathscr{F}_t^{(k+1)}.$$

类似地可证

$$\{\tau_{k+1} \leqslant t, W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k} < 0\} \in \mathscr{F}_t^{(k+1)}, \quad t \geqslant 0.$$

把以上两式与

$$\{\tau_{k+1} \leqslant t, W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k} = 0\} = \{U_{k+1} = 0\} \in \mathscr{F}_t^{(k+1)}, \quad t \geqslant 0$$

合并，我们得

$$\{\tau_{k+1} \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t^{(k+1)}, \quad t \geqslant 0.$$

这说明 $\tau_{k+1}$ 是 $\{\mathscr{F}_t^{(n+1)}, t\geqslant 0\}$ 的停时. 由 Wiener 过程的强马氏性知 $W^{(k+1)}=\{W_{\tau_k+t}-W_{\tau_k}, t\geqslant 0\}$ 是一个 Wiener 过程，又注意 $W^{(k+1)}$ 与 $(U_{k+1}, V_{k+1})$ 独立，表

(3.4.11) $$\tau_{k+1} - \tau_k = \tau(U_{k+1}, V_{k+1}; W^{(k+1)}),$$

由引理 3.4.4 便知 $\tau_{k+1}$ a.s. 有限且

(3.4.12) $$\tau_{k+1} - \tau_k \stackrel{d}{=} \tau_1;$$

(3.4.13) $$W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k} \stackrel{d}{=} W_{\tau_1}.$$

b. $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \cdots, \tau_{k+1}-\tau_k$ 独立同分布.

由定理 3.1.6 知 $W^{(k+1)}$ 与 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$ 独立. 由 $(U_{k+1}, V_{k+1})$ 与

$$\mathscr{F}^{(k)} = \sigma((U_i, V_i), 1 \leqslant i \leqslant k; W_t, t \geqslant 0)$$

独立以及 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)} \subset \mathscr{F}^{(k)}$ 又知 $(U_{k+1}, V_{k+1})$ 亦与 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$ 独立. 于是由 (3.4.11) 知 $\tau_{k+1}-\tau_k$ 与 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$ 独立. 但是，$\tau_1, \tau_2-\tau_1, \cdots, \tau_k-\tau_{k-1}$ 均关于 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$ 可测，故 $\tau_{k+1}-\tau_k$ 与 $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \cdots, \tau_k-\tau_{k-1}$ 独立. 这一事实加上假设 $B$ 和 (3.4.12) 即知 b 为真.

c. $W_{\tau_1}, W_{\tau_2}-W_{\tau_1}, \cdots, W_{\tau_{k+1}}-W_{\tau_k}$ 独立同分布.

表

$$W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k} = W^{(k+1)}_{\tau_{k+1}-\tau_k}.$$

由于 $W^{(k+1)}$ 和 $\tau_{k+1}-\tau_k$ 均与 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$ 独立，故 $W_{\tau_{k+1}}-W_{\tau_k}$ 亦与 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$ 独立. 由于 $W_{\tau_1}, W_{\tau_2}-W_{\tau_1}, \cdots, W_{\tau_k}-W_{\tau_{k-1}}$ 均为 $\mathscr{F}_{\tau_k}^{(k)}$ 可测，故又进而推知 $W_{\tau_{k+1}}-W_{\tau_k}$ 与 $W_{\tau_1}, W_{\tau_2}-W_{\tau_1}, \cdots, W_{\tau_k}-W_{\tau_{k-1}}$ 独立. 这一事实加上假设 C 和 (3.4.13) 式即得 c.

根据数学归纳法，我们通过以上过程可构造出一个 r.v. 序列 $\{\tau_n, n\geqslant 1\}$，对每 $n\geqslant 1$，$\tau_n$ 是 $\{\mathscr{F}_t^{(n)}, t\geqslant 0\}$ 的 a.s. 有限停时并且定理

的结论(1)和(2)成立. 注意对每 $t\geqslant 0$ 均有

$$\mathscr{F}_t^{(n)} \subset \mathscr{F}_t, \quad n \geqslant 1.$$

故对每 $n\geqslant 1$, $\tau_n$ 也是 $\{\mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$ 的 a.s. 有限停时. 证完.

## 习 题 3.4

1. 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一概率空间. 定义在 $\Omega\times \boldsymbol{R}$ 上的函数 $G(\cdot, \cdot)$ 满足

(1) 对每 $\omega\in\Omega$, $G(\omega, \cdot)$ 是一个 d.f.;

(2) 对每 $x\in\boldsymbol{R}$, $G(\cdot, x)$ 关于 $\mathscr{F}$ 可测.

试证明

(1) 对每 $x\in\boldsymbol{R}$, 令

$$F(x) = EG(\cdot, x),$$

则 $F$ 还是 d.f.;

(2) 对任何非负 Borel 可测函数 $f$,

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(x)\mathrm{d}F(x) = E\int_{\boldsymbol{R}} f(x)G(\cdot, \mathrm{d}x).$$

2. 设 $F$ 是一 d.f., 令

$$F^{-}(x) = \inf\{t \in \boldsymbol{R}: F(t) \geqslant x\}, \quad 0 < x < 1.$$

试证明

(1) $F^{-}$ 是 $(0,1)$ 上定义的非降、左连续的实值函数;

(2) 以 $U$ 表 $(0,1)$ 上均匀分布的 r.v., 则

$$F^{-}(U) \sim F;$$

3. 设非退化 d.f. $F$ 在 $t=0$ 连续且

$$\int_{\boldsymbol{R}} t\mathrm{d}F(t) = 0.$$

试证明

(1) $0<F(0)<1$;

(2) $x>F(0)\Rightarrow F^{-}(x)>0$, $x<F(0)\Rightarrow F^{-}(x)<0$;

(3) 令

$$\alpha(x) = \int_{F(0)}^{x} F^{-}(u)\mathrm{d}u, \quad F(0) \leqslant x < 1,$$

$$\beta(x) = \int_{x}^{F(0)} F^{-}(u)\mathrm{d}u, \quad 0 < x \leqslant F(0),$$

则存在$[F(0),1)$上严降的绝对连续函数 $g$ 使

$$\beta(g(x)) = -\alpha(x), \quad F(0) \leqslant x < 1;$$

(4) 令

$$X = [F(0),1),$$

$$\mathscr{B} = [F(0),1) \cap \mathscr{R},$$

$$P(B) = \int_{B} [1 - g'(x)]\mathrm{d}x, \quad B \in \mathscr{B},$$

$$U(x) = F^{-}(g(x)), \quad x \in X,$$

$$V(x) = F^{-}(x), \quad x \in X,$$

则$(X,\mathscr{B},P)$是一概率空间,$U,V$ 分别是非正和非负的 r.v. 而且

(A) $$\{U = 0\} = \{V = 0\},$$

(B) $$EG_{U,V}(t) = F(t), \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

(5) 去掉 $F$ 在 $t=0$ 连续的条件,仍然存在概率空间$(X,\mathscr{B},P)$和它上面定义的非正 r.v.$U$ 和非负 r.v.$V$ 使(4)中的(A),(B)成立.

4. 证明(3.4.10)中的等式.

5. 设 $\xi=\{\xi_t,t\geqslant 0\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的右连续过程.试证明

(1) $\xi(\cdot)=\{\xi_t(\omega):\omega\in\Omega,t\geqslant 0\}$作为 $\Omega\times[0,\infty)$上定义的函数是$\mathscr{F}\times[\mathscr{R}\cap[0,\infty)]$可测的;

(2) 如 $\tau$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v.,则 $\xi_\tau$ 仍是这个概率空间上的 r.v.;

(3) 如 $\xi$ 和 $\tau$ 与 $\mathscr{F}$ 的一个子 $\sigma$ 域 $\mathscr{G}$ 独立,则 $\xi_\tau$ 与 $\mathscr{G}$ 独立.

# 第四章 弱收敛理论

设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是i.i.d.的r.v.序列，对每$n\geqslant 1$，$E\xi_n=0$，$E\xi_n^2=1$，并且记$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. 众所周知的一个中心极限定理是

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n/n^{1/2}\leqslant x)=\Phi(x),\quad x\in \boldsymbol{R}.$$

上式左端极限号内是r.v. $S_n/n^{1/2}$的d.f.，而右端是一个标准正态d.f.. 因此，我们把它称为r.v.序列$\{S_n/n^{1/2}, n\geqslant 1\}$依分布收敛到标准正态分布. r.v.序列的d.f.对应着$\boldsymbol{R}$中的一列概率测度. 因此，从更基本的角度看，上述中心极限定理说明了一列概率测度在某种意义下收敛到正态分布的概率测度. 这里所说的某种意义就是指的弱收敛.

随机元序列的依分布收敛或概率测度的弱收敛是概率论关心的基本问题之一. 早在18世纪中期，de Moivre和Laplace就对i.i.d.的Bernoulli序列得到了中心极限定理，而Lindeberg-Feller定理则完成于本世纪的30年代. 把中心极限定理从独立和向非独立的情形推广一直是人们努力的一个方向，我们在第二节叙述的鞅的中心极限定理大致形成于本世纪的70年代. 1951年Donsker提出了他的著名的不变原理，引起了关于随机过程的依分布收敛的研究并导致了1956年Prohorov定理的产生(见第四节)，极大地丰富了弱收敛理论的内容.

本章的内容将这样安排：首先，我们介绍距离空间概率测度弱收敛的一般理论；然后再分别讨论鞅和独立和的中心极限定理；最后介绍Prohorov和Donsker的定理. 在第三节我们还安排了中心极限定理收敛速度的讨论. 应该指出，这些内容的安排对弱收敛理

论的各种提法或许只能起到一种“点到为止”的作用. 不少重要的内容,如关于独立 r.v. 阵列行和向无穷可分分布律收敛的一般理论,关于各种混合条件下部分和序列的依分布收敛,关于取值于 $D[0,1]$空间随机元的依分布收敛以及关于经验过程的弱收敛等都限于篇幅未能提到,有兴趣的读者请参考有关文献.

## 第一节　距离空间概率测度的弱收敛

### 1.1 弱收敛和依分布收敛

设 $X$ 是一给定的距离空间,$\rho$ 记 $X$ 的距离,$\mathscr{B}$ 记 $X$ 的 Borel 集系,$\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{C}$ 分别记 $X$ 的开集系和闭集系.

**定理 4.1.1**　设 $\mu$ 和 $\{\mu_n, n\geqslant 1\}$ 是 $(X,\mathscr{B})$ 上的概率测度. 则下列命题等价:

(1) 对 $X$ 上任一有界实值连续函数 $f$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f\mathrm{d}\mu_n = \int_X f\mathrm{d}\mu; \tag{4.1.1}$$

(2) 对 $X$ 上任一有界一致连续的实值函数 $f$,(4.1.1)成立;

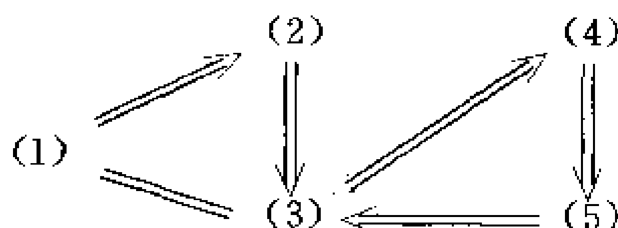
(3) 对每 $F\in\mathscr{C}$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$;

(4) 对每 $G\in\mathscr{O}$, $\liminf\limits_{n\to\infty}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$;

(5) 对每 $B\in\mathscr{B}$,如 $\mu(\partial B)=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(B) = \mu(B).$$

**证明**　采取下列路线:




现详细论证如下.

(1)⇒(2)：显然.

(2)⇒(3)：如 $F\in\mathscr{C}$，则

$$G_m =:\{x \in X : \rho(x,F) \leqslant 1/m\} \downarrow F.$$

对任给 $\varepsilon>0$，取 $m$ 使 $\mu(G_m\backslash F)<\varepsilon$. 再对此 $m$，作有界一致连续函数如同(1.4.2). 当(2)成立时便有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) &= \limsup_{n\to\infty}\int_F f_m \mathrm{d}\mu_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_X f_m \mathrm{d}\mu_n \\ &= \int_X f_m \mathrm{d}\mu = \int_{G_m} f_m \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \mu(G_m) < \mu(F)+\varepsilon.\end{aligned}$$

上式令 $\varepsilon\to 0$，得(3).

(3)⇒(1)：先证对一切有界实值连续函数 $f$ 有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f\mathrm{d}\mu_n \leqslant \int_X f\mathrm{d}\mu. \tag{4.1.2}$$

考虑满足 $0<f<1$ 的连续函数 $f$. 当(3)成立时对每正整数 $k$ 有

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_X f\mathrm{d}\mu_n &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(i/k)\mu_n((i-1)/k\leqslant f<i/k) \\ &= \limsup_{n\to\infty}\Big[\sum_{i=1}^{k}\mu_n(f\geqslant i/k)\Big]/k \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k}\mu(f\geqslant i/k)/k \\ &= \sum_{i=1}^{k}(i/k)\mu((i-1)/k\leqslant f<i/k) \\ &= 1/k+\sum_{i=1}^{k}[(i-1)/k]\mu((i-1)/k\leqslant f<i/k) \\ &\leqslant 1/k+\int_X f\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

上式令 $k\to\infty$，即知(4.1.2)对这种特殊的连续函数 $f$ 成立. 对一般的有界连续函数 $f$，取 $\alpha<\beta$ 使 $\alpha<f<\beta$，那么令 $g=(f-\alpha)/$

$(\beta-\alpha)$，则 $g$ 是满足 $0<g<1$ 的连续函数. 对 $g$ 用(4.1.2)即知(4.1.2)对一般的有界连续函数 $f$ 成立.

再说明(4.1.2)对一切有界连续函数成立就意味着(4.1.1)对一切有界连续函数成立. 事实上，如 $f$ 是有界连续函数，那么 $-f$ 亦然. 而以 $-f$ 代入(4.1.2)可得

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f\mathrm{d}\mu_n \geqslant \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

把上式和(4.1.2)合并即是(4.1.1).

(3)⇔(4)：显然.

(3)，(4)⇒(5)：如(3)和(4)成立，则对任何 $B\in\mathscr{B}$，$\mu(\partial B)=0$，有

$$\begin{aligned}\mu(B)=\mu(B^\circ)&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\mu_n(B^\circ)\\&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\mu_n(B)\leqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(B)\\&\leqslant \limsup_{n\to\infty}\mu_n(B^-)\leqslant \mu(B^-)=\mu(B),\end{aligned}$$

故(5)成立.

(5)⇒(3)：若 $F\in\mathscr{C}$，对任 $\delta>0$ 令

$$F_\delta=\{x\in X:\rho(x,F)\leqslant\delta\},\quad G_\delta=\{x\in X:\rho(x,F)<\delta\},$$

则有

$$\partial F_\delta=F_\delta\backslash F_\delta^\circ\subset F_\delta\backslash G_\delta=\{x\in X:\rho(x,F)=\delta\}.$$

因此，如 $\delta>0$ 是 $\mu(F_\delta)$ 的连续点，则

$$\mu(\partial F_\delta)\leqslant\mu(F_\delta\backslash G_\delta)=0,$$

从而当(5)成立时得

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F_\delta)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(F_\delta)=\mu(F_\delta).$$

由于 $\mu(F_\delta)$ 的连续点在 $(0,\infty)$ 中稠，上式中令 $\delta$ 沿着 $\mu(F_\delta)$ 的连续点趋于 0 即得(3). 定理证完.

下面定义距离空间概率测度弱收敛的概念.

**定义 4.1.1** 设 $\mu$ 和 $\{\mu_n,n\geqslant1\}$ 是 $(X,\mathscr{B})$ 上的概率测度. 如果

定理 4.1.1 中(1)—(4)之任一条满足,则称$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$弱收敛到$\mu$,记作$\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

我们再通过弱收敛的概念来定义依分布收敛的概念.

**定义 4.1.2** 设对每$n\geqslant 1$,$\xi_n$是定义在概率空间$(\Omega_n,\mathscr{F}_n,P_n)$上而取值于同一距离空间$X$的随机元.如果对于$(X,\mathscr{B})$上的概率测度$\mu$,有

$$P_n\xi_n^{-1} \xrightarrow{w} \mu, \tag{4.1.3}$$

则称$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$依分布收敛到$\mu$,记作$\xi_n \xrightarrow{d} \mu$;如果(4.1.3)成立且右端的$\mu$恰是某一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(X,\mathscr{B})$的随机元$\xi$的分布,则称$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$依分布收敛到$\xi$,记作$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$.

我们对上述定义作三点说明:第一,我们只对距离空间的概率测度定义了弱收敛的概念,一般地说,只有当基础概率空间具有一定的拓扑性质时,才能定义它上面的概率测度的弱收敛;第二,讨随机元序列的依分布收敛,甚至不必要求它们定义在同一个概空间上,而只要求它们取值于同一距离可测空间;第三,取值于离空间的随机元序列的依分布收敛,本质上就是这列随机元取的距离空间上概率测度的弱收敛,因此,我们以后只叙述概率测收敛的有关结论,而希望读者能把它们翻译成依分布收敛的

## 1.2 弱收敛的充分条件

定理 4.1.1 给出了一组弱收敛的等价条件.但是,这些条件并不永远是好验证的.因此我们给出下列容易验证的充分条件.

**定理 4.1.2** 设$\mu$和$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$是距离空间$X$上的概率测度,$\mathscr{E}\subset\mathscr{B}$是一个$\pi$系.如果对每$A\in\mathscr{E}$,

$$\mu_n(A) \to \mu(A) \tag{4.1.4}$$

成立，则当下列条件之一成立时有 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$：

(1) 对每 $G\in\mathscr{O}$，存在 $\{A_k,k\geqslant 1\}\subset\mathscr{E}$，使

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k; \tag{4.1.5}$$

(2) $X$ 可分又对每 $x\in X$ 和每 $\varepsilon>0$，存在 $A\in\mathscr{E}$ 使

$$x\in A^0\subset A\subset U(x,\varepsilon).$$

**证明** 在条件(1)之下，对任 $G\in\mathscr{O}$，取 $\{A_k,k\geqslant 1\}\subset\mathscr{E}$ 使(4.1.5)成立，则对任给 $\varepsilon>0$，存在一个 $k_0$ 使 $\mu(G)-\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k_0}A_k\right)<\varepsilon$ 从而由(4.1.4)推知

$$\begin{aligned}\mu(G)-\varepsilon&<\mu\left(\bigcup_{k=1}^{k_0}A_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{k_0}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant k_0}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_0}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant k_0}\mu_n(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})\\&=\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{k_0}A_k\right)\leqslant\liminf_{n\to\infty}\mu_n(G).\end{aligned}$$

上式中令 $\varepsilon\to 0$ 即知定理 4.1.1 之(4)满足，故 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$.

在条件(2)之下，如 $G\in\mathscr{O}$，则对每 $x\in X$，可取 $\varepsilon_x>0$ 使 $U(x,\varepsilon_x)\subset G$，而对此 $\varepsilon_x>0$，又可取 $A_x\in\mathscr{E}$ 使

$$x\in A_x^0\subset A_x\subset U(x,\varepsilon_x).$$

于是，对任 $\{x_k,k\geqslant 1\}\subset G$ 均有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{x_k}^0\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{x_k}\subset G.$$

但是，$\{A_x^0,x\in G\}$ 是 $G$ 的开覆盖而 $X$ 又可分，故从中又可取出 $G$ 的一个可数子覆盖，也就是说，一定存在 $\{x_k,k\geqslant 1\}\subset G$ 使

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{x_k} \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{x_k}^0 \supset G.$$

这样，我们就有 $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{x_k}$，从而说明了(2)蕴含(1). 定理证完.

作为定理 4.1.2 的一个应用，我们来讨论 $\boldsymbol{R}$ 上概率测度的弱收敛. 用符号 $C(f)$ 来记 $\boldsymbol{R}$ 上实值函数 $f$ 的连续点的全体，我们先回顾一下 $\boldsymbol{R}$ 上 d.f. 弱收敛的概念.

**定义 4.1.3** 设 $F$ 和 $\{F_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 d.f.. 如果对每 $x\in C(F)$ 均有

$$F_n(x) \to F(x),$$

则称 $\{F_n, n\geqslant 1\}$ 弱收敛到 $F$，记作 $F_n \xrightarrow{w} F$.

正如我们在第一章第四节所提到的，$\boldsymbol{R}$ 上的概率测度 $\mu$，d.f. $F$ 和 c.f.（特征函数将缩写为 c.f.）$f$ 之间有 1—1 的对应关系. 下列的系表明，$\boldsymbol{R}$ 上概率测度列的弱收敛，d.f. 列的弱收敛及 c.f. 列的收敛之间也有对应关系.

**系 4.1.3** 设 $\{\mu_n, n\geqslant 1\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的概率测度列，$\{F_n, n\geqslant 1\}$ 和 $\{f_n, n\geqslant 1\}$ 分别是对应的 d.f. 列和 c.f. 列. 则下列三种说法等价：

(1) 存在 $\boldsymbol{R}$ 上的概率测度 $\mu$ 使

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu;$$

(2) 存在 $\boldsymbol{R}$ 上 d.f. $F$ 使

$$F_n \xrightarrow{w} F;$$

(3) 存在 $\boldsymbol{R}$ 上在 0 点连续的复值函数 $f$，使对每 $t\in\boldsymbol{R}$，

$$f_n(t) \to f(t);$$

而且这时 $F$ 和 $f$ 分别是 $\mu$ 对应的 d.f. 和 c.f..

**证明** (2)和(3)等价而且此时 $f$ 是 $F$ 对应的 $f$ 就是初等概率论中的 Levy 连续性定理. 故只需证(1)⇔(2). (1)⇒(2)而且 $F$ 就是 $\mu$ 对应的 d.f. 乃是定理 4.1.1,(5)之推论. 故又只需证(2)⇒

(1) 如(2)成立,取一个如下的 $\pi$ 系

$$\mathscr{E}=\{(a,b];a,b\in C(F),a<b\},$$

则对每$(a,b]\in\mathscr{E}$,有

$$\mu_n(a,b]=F_n(b)-F_n(a)\to F(b)-F(a)=\mu(a,b].$$

由于 $X=\boldsymbol{R}$ 可分,又由于 $C(F)$在 $R$ 中稠,故定理 4.1.2 之条件(2)满足,从而(1)必须成立且 $\mu$ 必是 $F$ 对应的概率测度. 证完.

### 1.3 乘积距离空间概率测度的弱收敛

设$\{(X_i,\mathscr{B}_i),i=1,\cdots,k\}$是距离可测空间. 以$(X,\mathscr{B})$记其乘积距离可测空间. 设 $\mu$ 是$(X,\mathscr{B})$上的概率测度. 对每 $i=1,\cdots,k$, 以 $\pi_i$ 记 $X$ 到 $X_i$ 的投影映射并令 $\mu^{(i)}=\mu\pi_i^{-1}$.

**定理 4.1.4** 设 $\mu$ 和$\{\mu_n,n\geqslant1\}$是乘积距离空间$(X,\mathscr{B})$上的概率测度. 如果对每 $i=1,\cdots,k,X_i$ 是可分的,则 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$ 当且仅当对每 $i=1,\cdots,k$,对每满足 $\mu^{(i)}(\partial B_i)=0$ 之 $B_i\in\mathscr{B}_i$,有

$$\mu_n\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i\Big)\to\mu\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i\Big). \tag{4.1.6}$$

**证明** 必要性. 对每 $i=1,\cdots,n$,每 $B_i\in\mathscr{B}_i$,有

$$\begin{aligned}\partial\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i\Big)&=\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i\Big)^{-}\Big\backslash\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i\Big)^{0}\subset\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i^{-}\Big)\Big\backslash\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i^{0}\Big)\\&\subset\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\pi_i^{-1}B_i^{-}\Big)\Big\backslash\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\pi_i^{-1}B_i^{0}\Big)\subset\bigcup_{i=1}^{k}[(\pi_i^{-1}B_i^{-})\backslash(\pi_i^{-1}B_i^{0})]\\&=\bigcup_{i=1}^{k}\pi_i^{-1}(\partial B_i).\end{aligned}$$

因此当 $\mu(\pi_i^{-1}(\partial B_i))=\mu^{(i)}(\partial B_i)=0$ 对每 $i=1,\cdots,n$ 成立时必有 $\mu\Big(\partial\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}B_i\Big)\Big)=0$. 由定理 4.1.1 之(5)即知 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$ 蕴含(4.1.6)对一切满足 $\mu^{(i)}(\partial B_i)=0$ 之 $B_i\in\mathscr{B}_i(i=1,\cdots,k)$成立.

充分性. 由于 $X_1,\cdots,X_n$ 可分,故

$$\mathscr{B} = \bigtimes_{i=1}^{k} \mathscr{B}_i$$

(定理 1.2.1). 令

$$\mathscr{E} = \left\{ \bigtimes_{i=1}^{n} B_i : B_i \in \mathscr{B}_i, \mu^{(i)}(\partial B_i) = 0, i = 1, \cdots, k \right\}.$$

不难见 $\mathscr{E}$ 是 $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ 中满足定理 4.1.2 之条件(2)之 $\pi$ 系. 利用定理 4.1.2 即知(4.1.6)蕴含 $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. 证完.

我们可以利用定理 4.1.4 来讨论 $\boldsymbol{R}^k$ 上概率测度的弱收敛. 设 $F$ 是一个 $k$ 维 d.f.. 以 $F^{(i)}$ 记 $F$ 的第 $i$ 个边缘 d.f., 即

$$F^{(i)}(x_i) = F(\underbrace{\infty, \cdots, \infty}_{i-1}, x_i, \infty, \cdots, \infty), \quad x_i \in \boldsymbol{R}.$$

**定义 4.1.4** 设 $F$ 和 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是 $k$ 维 d.f.. 如果对每 $x = (x_1, \cdots, x_k) \in \boldsymbol{R}^k$, $x_i \in C(F^{(i)})$, $i = 1, \cdots, k$, 有

$$F_n(x) \to F(x),$$

则称 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 弱收敛到 $F$, 记作 $F_n \xrightarrow{w} F$.

回顾 $k$ 维 d.f. $F$ 的 c.f. $f$ 的定义

$$f(t_1, \cdots, t_k) = \int \cdots \int_{\boldsymbol{R}^k} \exp\left( \mathrm{i} \sum_{j=1}^{k} t_j x_j \right) \mathrm{d}F(x_1, \cdots, x_k), (t_1, \cdots, t_k) \in \boldsymbol{R}^k$$

和多维的 Levy 连续性定理, 由定理 4.1.4 易得

**系 4.1.5** 设 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\boldsymbol{R}^k$ 上的概率测度, $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 和 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 分别是对应的 d.f. 和 c.f.. 则下列三种说法等价:

(1) 存在 $\boldsymbol{R}^k$ 的概率测度 $\mu$ 使

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu;$$

(2) 存在 $\boldsymbol{R}^k$ 上的 d.f. $F$ 使

$$F_n \xrightarrow{w} F;$$

(3) 存在 $\boldsymbol{R}^k$ 上在 $(0, \cdots, 0)$ 点连续的复值函数 $f$, 使对每 $(t_1,$

$\cdots,t_k)\in \boldsymbol{R}^k$ 有

$$f_n(t_1,\cdots,t_k)\to f(t_1,\cdots,t_k);$$

这时 $F$ 和 $f$ 分别是 $\mu$ 对应的 d. f. 和 c. f..

这个系的证明请读者完成.

### 1.4 距离空间映射导出概率测度的弱收敛

设 $(X,\rho)$ 和 $(X^*,\rho^*)$ 是距离空间，其开集系、闭集系及 Borel 集系分别记作 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{O}^*$、$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}^*$ 以及 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}^*$. 又设 $\mu$ 是 $(X,\mathscr{B})$ 上的概率测度，$f$ 是 $(X,\mathscr{B})$ 到 $(X^*,\mathscr{B}^*)$ 的可测映射. 令

$$\mu f^{-1}(B^*)=\mu(f^{-1}(B^*)),\quad B^*\in\mathscr{B}^*$$

并称之为 $f$ 的导出测度(用第一节的话说，$f$ 是 $(X,\mathscr{B},\mu)$ 到 $(X^*,\mathscr{B}^*)$ 的随机元，$\mu f^{-1}$ 是这个随机元的分布). 对于 $(X,\mathscr{B})$ 上的概率测度列 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}$ 和 $(X,\mathscr{B})$ 到 $(X^*,\mathscr{B}^*)$ 的可测映射 $f$，我们的任务是研究

(4.1.7) $$\mu_n\xrightarrow{w}\mu$$

和

(4.1.8) $$\mu_n f^{-1}\xrightarrow{w}\mu f^{-1}$$

之间的关系.

**引理 4.1.6** 设 $f$ 是 $(X,f)$ 到 $(X^*,\mathscr{B}^*)$ 的任一映射，$D_f$ 是 $f$ 的不连续点组成之集. 则

$$D_f\in\mathscr{B}.$$

**证明** 以 $\Gamma$ 记正有理数的全体组成之集. 对任给 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，以 $G_{\varepsilon,\delta}$ 记 $X$ 中这样的 $x$ 组成之集：存在 $y,z\in X$，使 $\rho(y,x)\vee\rho(z,x)<\delta$ 但 $\rho^*(f(g),f(z))\geqslant\varepsilon$. 不难见

$$D_f=\bigcup_{\varepsilon\in\Gamma}\bigcap_{\delta\in\Gamma}G_{\varepsilon,\delta}.$$

因此，为证引理，只需证对每 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，$G_{\varepsilon,\delta}\in\mathscr{O}$. 为此，只需注

意，如 $x\in G_{\varepsilon,\delta}$，则可取 $y,z\in X$ 使 $\rho(y,x)<\delta,\rho(z,x)<\delta$ 及 $\rho^*(f(x),f(y))\geqslant\varepsilon$. 这时令

$$\alpha=\delta-\rho(y,x)\vee\rho(z,x)>0,$$

则当 $\rho(u,x)<\alpha$ 时就有

$$\rho(u,y)\leqslant\rho(u,x)+\rho(y,x)<\delta;$$

$$\rho(u,z)\leqslant\rho(u,x)+\rho(z,x)<\delta;$$

$$\rho^*(f(y),f(z))\geqslant\varepsilon.$$

这说明 $U(x,\alpha)\subset G_{\varepsilon,\delta}$. 证完.

**定理 4.1.7** 设 $f$ 是 $(X,\mathscr{B})$ 到 $(X^*,\mathscr{B}^*)$ 的可测映射且 $\mu(D_f)=0$，则(4.1.7)蕴含(4.1.8).

**证明** 对任给的 $F^*\in\mathscr{C}^*$，我们先证

$$(f^{-1}(F^*))^-\subset f^{-1}(F^*)\cup D_f. \tag{4.1.9}$$

为此，又只需证

$$(f^{-1}(F^*))^-\setminus D_f\subset f^{-1}(F^*).$$

设 $x\in(f^{-1}(F^*))^-\setminus D_f$. 此时，由于 $x\in(f^{-1}(F^*))^-$，故可取 $x_n\in f^{-1}(F^*)$ 使 $\rho(x_n,x)\to0$；由于 $x\notin D_f$，故又必须有 $\rho^*(f(x_n),f(x))\to0$. 但 $f(x_n)\in F^*\in\mathscr{C}$，故又进而推知 $f(x)\in F^*$ 从而 $x\in f^{-1}(F^*)$. 因此(4.1.9)得证.

如果(4.1.7)成立并且 $\mu(D_f)=0$，那么由定理 4.1.1 之(3)及刚才证明之(4.1.9)即得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}(\mu_nf^{-1})(F^*)\\ &=\limsup_{n\to\infty}\mu_n(f^{-1}(F^*))\leqslant\limsup_{n\to\infty}\mu_n((f^{-1}(F^*))^-)\\ &\leqslant\mu((f^{-1}(F^*))^-)\leqslant\mu(f^{-1}(F^*))+\mu(D_f)\\ &=\mu(f^{-1}(F^*))=(\mu f^{-1})(F^*).\end{aligned}$$

据定理 4.1.1 之(3)，上式意味着(4.1.8). 证完.

把上述定理应用于 $X^*=\boldsymbol{R}$，得

**系 4.1.8** 对于距离空间 $X$ 上之概率测度 $\mu$ 和 $\{\mu_n,n\geqslant1\}$，

(4.1.7)成立之必要充分条件是对 $X$ 上任何有界实值连续函数 $f$,(4.1.8)成立.

**证明** 必要性乃是定理 4.1.7 之推论.为证充分性,对任有界实值连续函数 $f$, $|f|\leqslant M$,令

$$g(t)=\begin{cases}-M, & t\leqslant -M,\\ t, & |t|\leqslant M,\\ M, & t\geqslant M,\end{cases}$$

则当(4.1.8)成立时,由定理 4.1.1 之(1)及定理 1.1.2 推知

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)\mu_n(\mathrm{d}x)=\lim_{n\to\infty}\int_X g(f(x))\mu_n(\mathrm{d}x)=\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}} g(t)(\mu_n f^{-1})(\mathrm{d}t)$$
$$=\int_{\boldsymbol{R}} g(t)(\mu f^{-1})(\mathrm{d}t)=\int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

据定理 4.1.1 之(1),上式意味着(4.1.7).证完.

下面,我们利用定理 4.1.7 和系 4.1.8 来讨论 $\boldsymbol{R}^\infty$ 上概率测度的弱收敛.对每 $k\geqslant 1$,以 $\pi_k$ 记 $\boldsymbol{R}^\infty$ 到 $\boldsymbol{R}^k$ 的投影映射.先证一个引理.

**引理 4.1.9** 对任 $k\geqslant 1$ 和任 $A\subset\boldsymbol{R}^k$,

$$\partial(\pi_k^{-1}A)=\pi_k^{-1}(\partial A). \tag{4.1.10}$$

**证明** 由于投影映射 $\pi_k$ 是距离空间 $(\boldsymbol{R}^\infty,d_\infty)$ 到距离空间 $(\boldsymbol{R}^k,d_k)$ 的连续映射,故对任 $A\subset\boldsymbol{R}^k$, $\pi_k^{-1}A^0$ 和 $\pi_k^{-1}A^-$ 分别是 $\boldsymbol{R}^\infty$ 中之开集和闭集,从而

$$\partial(\pi_k^{-1}A)=(\pi_k^{-1}A)^-\backslash(\pi_k^{-1}A)^c\subset\pi_k^{-1}A^-\backslash\pi_k^{-1}A^0$$
$$=\pi_k^{-1}(A^-\backslash A^0)=\pi_k^{-1}(\partial A).$$

因此,为了完成引理的证明,只需再证

$$\pi_k^{-1}(\partial A)\subset\partial(\pi_k^{-1}A). \tag{4.1.11}$$

设 $x\in\pi_k^{-1}(\partial A)$.由于此时 $\pi_k x\in\partial A$,故 $\pi_k x$ 的任一邻域内既有 $A$ 的点,又有 $A^c$ 的点.因此存在 $\alpha^{(n)}=(\alpha_1^{(n)},\cdots,\alpha_k^{(n)})\in A$ 和 $\beta^{(n)}=(\beta_1^{(n)},\cdots,\beta_k^{(n)})\in A^c(n\geqslant 1)$,使当 $n\to\infty$ 时,有

$$d_k(\alpha^{(n)},\pi_k x)\to 0;\quad d_k(\beta^{(n)},\pi_k x)\to 0,$$

从而亦有

$$(\alpha_1^{(n)},\cdots,\alpha_k^{(n)},x_{k+1},\cdots)\to x;\tag{4.1.12}$$

$$(\beta_1^{(n)},\cdots,\beta_k^{(n)},x_{k+1},\cdots)\to x.$$

但是,我们知

$$(\alpha_1^{(n)},\cdots,\alpha_k^{(n)},x_{k+1},\cdots)\in\pi_k^{-1}A;$$

$$(\beta_1^{(n)},\cdots,\beta_k^{(n)},x_{k+1},\cdots)\in\pi_k^{-1}A^c=(\pi_k^{-1}A)^c,$$

故(4.1.12)又意味着在 $x$ 的任一邻域内既有 $\pi_k^{-1}A$ 的点又有 $(\pi_k^{-1}A)^c$ 的点.这说明 $x\in\partial(\pi_k^{-1}A)$.于是(4.1.11)得证.引理证完.

设 $\mu$ 是 $\boldsymbol{R}^\infty$ 上的概率测度,对每 $k\geqslant 1$,每 $(x_1,\cdots,x_k)\in\boldsymbol{R}^k$,令

$$F^{(k)}(x_1,\cdots,x_k)=(\mu\pi_k^{-1})\Big(\mathop{\times}_{i=1}^{k}(-\infty,x_i]\Big).$$

我们称 $\{F^{(k)},n\geqslant 1\}$ 为 $\mu$ 对应的有限维 d.f. 族.

**系 4.1.10** 设 $\mu$ 和 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}$ 是 $(\boldsymbol{R}^\infty,\mathscr{R}^\infty)$ 上的概率测度 $\{F^{(k)},k\geqslant 1\}$ 和 $\{F_n^{(k)},k\geqslant 1;n\geqslant 1\}$ 分别是对应的有限维 d.f. 族.则下列三命题等价:

(1) $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$;

(2) 对每 $k\geqslant 1$,$\mu_n\pi_k^{-1}\xrightarrow{w}\mu\pi_k^{-1}$;

(3) 对每 $k\geqslant 1$,$F_n^{(k)}\xrightarrow{w}F^{(k)}$.

**证明** (2)⇔(3)由系 4.1.5 可得,(1)⇒(2)由定理 4.1.7 可得,故只需证(2)⇒(1).

令 $\mathscr{E}$ 是由 $\mathscr{R}^\infty$ 中这样的集合 $A$ 组成之集合系,$\mu(\partial A)=0$ 且存在 $k\geqslant 1$ 和 $A_k\in\mathscr{R}^k$ 使 $A=\pi_k^{-1}A_k$.不难验证,$\mathscr{E}$ 是 $\mathscr{R}^\infty$ 中的一个 $\pi$ 系.

对每 $A\in\mathscr{E}$,取 $k\geqslant 1$ 和 $A_k\in\mathscr{R}^k$ 使 $A=\pi_k^{-1}A_k$,则由引理 4.1.9 推知

$$(\mu\pi_k^{-1})(\partial A_k) = \mu(\pi_k^{-1}(\partial A_k)) = \mu(\partial(\pi_k^{-1}A_k)) = \mu(\partial A) = 0.$$

因此，在(2)之下有

$$\mu_n(A) = \mu_n(\pi_k^{-1}A_k) = (\mu_n\pi_k^{-1})(A_k) \to (\mu\pi_k^{-1})(A_k)$$
$$= \mu(\pi_k^{-1}A_k) = \mu(A),$$

即(4.1.4)成立.

对每 $x=(x_n,n\geqslant 1)\in \boldsymbol{R}^\infty, k\geqslant 1, \delta>0$，令

$$N_{k,\delta}(x) = \{y=(y_n,n\geqslant 1): |y_i - x_i| < \delta, 1\leqslant i\leqslant k\}.$$

由于当 $x$ 和 $k$ 固定时，$\mu(N_{k,\delta}(x))$是 $\delta$ 的非降函数，故 $\mu(N_{k,\delta}(x))$ 作为 $\delta$ 的函数至多有可数个不连续点，故使 $\mu(\partial(N_{k,\delta}(x)))=0$ 之 $\delta$ 在$(0,\infty)$中稠. 因此

$$\{N_{k,\delta}(x): x\in \boldsymbol{R}^\infty; k\geqslant 1; \delta>0, \mu(\partial(N_{k,\delta}(x)))=0\}\subset \mathscr{E}$$

是$(\boldsymbol{R}^\infty,\mathscr{R}^\infty)$的拓扑基. 这说明定理 4.1.2 的条件(2)亦满足. 于是引用定理 4.1.2 即证得(2)⇒(1). 证完.

### 1.5 稳定地依分布收敛

在讨论鞅序列的依分布收敛问题时，人们广泛地使用一个比依分布收敛更严的概念——稳定地依分布收敛，简称为稳定收敛.

**定义 4.1.5** 设$\{S_n,n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到距离可测空间$(X,\mathscr{B})$的随机元. 如果对每 $A\in\mathscr{F}$，存在$(X,\mathscr{B})$上的测度 $\nu(\cdot,A)$，使

$$\nu(X,A) = P(A) \tag{4.1.13}$$

成立，并且当 $B\in\mathscr{B}$ 满足 $\nu(\partial B,A)=0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n\in B, A) = \nu(B,A), \tag{4.1.14}$$

则称$\{S_n,n\geqslant 1\}$稳定收敛到 $\nu$，记作

$$S_n \xrightarrow{\text{s.d.}} \nu. \tag{4.1.15}$$

不难看出，如果$\{S_n,n\geqslant 1\}$稳定收敛到 $\nu$，那么对每 $B\in\mathscr{B}$，$\nu(B,\cdot)$是 $\mathscr{F}$ 上的测度；而 $\mu(\cdot):=\nu(\cdot,\Omega)$是 $\mathscr{B}$ 上的概率测

度. 今后，我们将称 $\mathscr{B}\times\mathscr{F}$ 上的函数 $\nu$ 为一个混合概率测度，如果对每 $A\in\mathscr{F}$，$\nu(\cdot,A)$是 $\mathscr{B}$ 上满足(4.1.13)的测度，对每 $B\in\mathscr{B}$，$\nu(B,\cdot)$是 $\mathscr{F}$ 上的测度. 从定义 4.1.3 可见，稳定收敛是对混合概率测度定义的. 当(4.1.15)成立时，显然有 $S_n\xrightarrow{d}\mu$. 正是在这个意义下，我们说稳定收敛是一个比依分布收敛更严的概念.

对每 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)>0$，令

$$P_A(A') = P(A'\cap A)/P(A),$$

则$(\Omega,\mathscr{F},P_A)$仍是一个概率空间. 从定义 4.1.5 又不难看出，(4.1.15)等价于对每 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)>0$，在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P_A)$上总有 $S_n\xrightarrow{d}\nu_A$，其中

$$\nu_A(B) = \nu(B,A)/P(A).$$

所以，尽管稳定收敛的要求比依分布收敛的要求更高，但是，以上各小节的结论和方法在改头换面之后却仍然适用. 下面，我们集中讨论一下 r.v. 序列的稳定收敛. 为了说起来方便，我们将把 $\boldsymbol{R}$ 上定义的有界、非降右连续函数 $G$ 叫做准分布函数(缩写为q.d.f.)，如果

$$G(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} G(x) = 0.$$

利用这个术语，可以把 r.v. 序列的稳定收敛等价地定义如下.

**定义 4.1.6** 设$\{S_n,n\geqslant1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r.v. 列. 如对每 $A\in\mathscr{F}$，存在 q.d.f. $G(\cdot,A)$使

$$G(\infty,A) = P(A) \tag{4.1.16}$$

成立，并且对每 $x\in C(G(\cdot,A))$有

$$\lim_{n\to\infty}P(S_n\leqslant x,A) = G(x,A), \tag{4.1.17}$$

则称$\{S_n,n\geqslant1\}$稳定收敛到 $G$，记作

$$S_n\xrightarrow{\text{s.d.}}G; \tag{4.1.18}$$

如果对上述 $G$，有 d.f. $F$ 使

(4.1.19) $\qquad G(x,A)=F(x)P(A),\quad x\in \boldsymbol{R},A\in\mathscr{F},$

则当(4.1.17)对每 $x\in C(F)$ 和每 $A\in\mathscr{F}$ 成立时,称 $\{S_n,n\geqslant 1\}$ 混合收敛到 d.f. $F$,记作

$$S_n\xrightarrow{\text{m.d.}}F.$$

我们将把 $\boldsymbol{R}\times\mathscr{F}$ 上定义的函数 $G$ 称为混合分布函数,缩写为 m.d.f.,如对每 $A\in\mathscr{F}$,$G(\cdot,A)$ 是满足(4.1.16)的 q.d.f.,对每 $x\in\boldsymbol{R}$,$G(x,\cdot)$ 是 $\mathscr{F}$ 上之测度.不难证明定义 4.1.6 中的 $G$ 是一个 m.d.f..令

(4.1.20) $\quad G_n(x,A)=P(S_n\leqslant x,A),\quad x\in\boldsymbol{R},A\in\mathscr{F},$

则对每 $n\geqslant 1$,$G_n$ 也是 m.d.f..于是,定义 4.1.6 乃是把稳定收敛看作一列 m.d.f. 向一个 m.d.f. 的收敛.下面的定理表明,这种收敛又等价于对应的"特征函数"列的收敛.

**定理 4.1.11** 如果(4.1.18)成立,则对 $\boldsymbol{R}$ 上任一有界连续函数 $f$ 和任一 $A\in\mathscr{F}$,有

(4.1.21) $$\lim_{n\to\infty}Ef(S_n)I_A=\int_{\boldsymbol{R}}f(x)G(\mathrm{d}x,A).$$

反之,如对每 $A\in\mathscr{F}$,存在在 $t=0$ 处连续的复值函数 $g(\cdot,A)$ 使

(4.1.22) $$\lim_{n\to\infty}E[\exp(\mathrm{i}tS_n)]I_A=g(t,A),\quad t\in R,$$

则(4.1.18)成立而且其右端的 $G$ 由下式确定:

(4.1.23) $$g(t,A)=\int_{\boldsymbol{R}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}G(\mathrm{d}x,A),\quad t\in\boldsymbol{R},A\in\mathscr{F}.$$

**证明** 先证第一个结论.如果 $P(A)=0$,(4.1.18)显然成立.无妨设 $P(A)>0$.对每 $n\geqslant 1$,定义 $G_n$ 如(4.1.20).当(4.1.18)成立时,(4.1.17)意味着 d.f. 序列 $\{G_n(\cdot,A)/P(A),n\geqslant 1\}$ 弱收敛到 d.f. $G(\cdot,A)/P(A)$.因此,由定理 4.1.1 之(1)推知

$$\begin{aligned}Ef(S_n)I_A/P(A)&=\int_{\boldsymbol{R}}f(x)G_n(\mathrm{d}x,A)/P(A)\\&\to\int_{\boldsymbol{R}}f(x)G(\mathrm{d}x,A)/P(A)\end{aligned}$$

对任有界连续函数 $f$ 成立. 上式两端消去 $P(A)$ 亦得(4.1.21).

再证第二个结论. 如果 $A\in\mathscr{F}, P(A)=0$ 使(4.1.22)成立,则其右端之 $g(\cdot,A)\equiv 0$,从而由(4.1.23)确定出 $G(\cdot,A)\equiv 0$. 这个 $G$ 显然符合(4.1.16)和(4.1.17). 如果 $A\in\mathscr{F}, P(A)>0$ 使(4.1.22)成立,则 c.f. 序列 $\{E[\exp(itS_n)]I_A/P(A), n\geqslant 1\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛到在 $t=0$ 处连续之复值函数 $g(\cdot,A)/P(A)$,故 $g(\cdot,A)/P(A)$ 必是 c.f.. 据系 4.1.3,这时对应的 d.f. 列 $\{P(S_n\leqslant x,A)/P(A), n\geqslant 1\}$ 弱收敛到 d.f. $G(\cdot,A)/P(A)$,所以(4.1.17)仍然成立而且其右端之 $G$ 由(4.1.23)唯一确定. 根据定义 4.1.6,我们得(4.1.18). 证完.

## 习 题 4.1

1. 设 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 和 $\xi$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于可分距离空间 $(X,\rho)$ 的随机元. 如果 $\rho(\xi_n,\xi)\xrightarrow{P}0$,则称 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 依概率收敛到 $\xi$,记作 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$. 试证

(1) 如 $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$,则 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$;

(2) 对任 $a\in X$,如 $\xi_n\xrightarrow{d}a$,则 $\xi_n\xrightarrow{P}a$;

(3) 如果 $\{\eta_n, n\geqslant 1\}$ 也是取值于 $(X,\rho)$ 的随机元而且 $\rho(\xi_n,\eta_n)\xrightarrow{P}0$,则对于 $X$ 上的任一概率测度 $\mu$, $\xi_n\xrightarrow{d}\mu$ 当且仅当 $\eta_n\xrightarrow{d}\mu$.

2. 设 $\mu$ 和 $\{\mu_n, n\geqslant 1\}$ 是距离空间 $X$ 上的有限测度. 如果对 $X$ 上任一有界连续函数 $f$,(4.1.1)成立,则称 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$. 试证下列命题等价:

(1) $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$;

(2) 对每闭集 $F$, $\limsup\limits_{n\to\infty}\mu_n(F)\leqslant\mu(F)$,且

$$\mu_n(X)\to\mu(X); \tag{4.1.24}$$

(3) 对每开集 $G$，$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(G)\geqslant\mu(G)$ 且(4.1.24)成立；

(4) 对每 Borel 集 $B$，如 $\mu(\partial B)=0$，则 $\mu_n(B)\to\mu(B)$；

(5) 对每有界上连续函数 $f$，

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f\mathrm{d}\mu_n\leqslant\int_X f\mathrm{d}\mu;$$

(6) 对每有界下连续函数 $f$，

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f\mathrm{d}\mu_n\geqslant\int_X f\mathrm{d}\mu.$$

3. 设 $F$ 和 $F_n,n\geqslant1$ 是 $R$ 上的 d.f. 而且 $F$ 连续. 证明：如果 $F_n\xrightarrow{w}F$，则

$$\sup_{x\in R}|F_n(x)-F(x)|\to0,\quad n\to\infty.$$

4. 设 $f$ 和 $f_n,n\geqslant1$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 c.f.，对每 $t\in\boldsymbol{R}$

$$f_n(t)\to f(t).$$

证明：对每 $T>0$，

$$\sup_{t\in[-T,T]}|f_n(t)-f(t)|\to0,\quad n\to\infty.$$

5. 设 $\boldsymbol{R}$ 中 d.f. 列 $\{F_n,n\geqslant1\}$ 满足条件：对任给 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$ 使对一切 $n\geqslant1$，

$$F_n(A)-F_n(-A)>1-\varepsilon.$$

证明：如果存在 $\boldsymbol{R}$ 中可数稠集 $D$ 使对每 $x\in D$，$\lim_{n\to\infty}F_n(x)$ 存在，则对某 d.f. $F$，有

$$F_n\xrightarrow{w}F.$$

6. 设 $\{F_n,n\geqslant1\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中 d.f. 列，$F$ 和 $G$ 是非退化 d.f.. 证明：如存在 $\alpha_n,a_n>0$ 和 $\beta_n,b_n\in\boldsymbol{R}$ 使

$$F_n(\alpha_n x+\beta_n)\xrightarrow{w}F(x),\quad F_n(a_n x+b_n)\xrightarrow{w}G(x),$$

则存在 $a>0$ 和 $b\in\boldsymbol{R}$ 使

$$a_n/\alpha_n\to a,\quad(b_n-\beta_n)/\alpha_n\to b$$

而且 $F(ax+b)=G(x)$.

7. 设$\{f_n,n\geqslant 1\}$是一$\boldsymbol{R}$中c.f.列. 证明:如果存在$a>0$使当$|t|<a$时,$f_n(t)\to 1$,则对一切$t\in\boldsymbol{R}$均有

$$f_n(t)\to 1.$$

8. 设$\{S_n,n\geqslant 1\}$是r.v.列,对某$r>0$,$\sup\limits_{n\geqslant 1}E|S_n|^r<\infty$. 证明:如果对某r.v. $S$,$S_n\xrightarrow{d}S$,则对一切$p\in(0,r)$均有

$$E|S_n|^p\to E|S|^p.$$

9. 对任意两个d.f. $F$和$G$,令

$$L(F,G)=\inf\{\varepsilon>0;\text{对每 }x\in\boldsymbol{R},F(x-\varepsilon)-\varepsilon\leqslant G(x)\leqslant F(x+\varepsilon)+\varepsilon\}.$$

证明:

(1) $L$是分布函数空间(即$\boldsymbol{R}$上所有的分布函数组成之集)上的距离,称为Levy距离;

(2) 分布函数空间在Levy距离下是完备可分距离空间;

(3) 对于任何d.f. $\{F_n,n\geqslant 1\}$和$F$,$F_n\xrightarrow{w}F$当且仅当$L(F_n,F)\to 0$;

10. 对于$\boldsymbol{R}$上任一非降函数$F$,令

$$F^-(t)=\inf\{x;F(x)\geqslant t\},\quad F(-\infty)<t<F(\infty).$$

设$F$和$F_n,n\geqslant 1$是d.f.,证明

$$F_n\xrightarrow{w}F$$

当且仅当对$F^-$的每一个连续点$t$,

$$F_n^-(t)\to F^-(t).$$

11. 设$\{G_n,n\geqslant 1\}$和$G$是q.d.f.. 如对每$a,b\in C(G),a<b$,均有

$$G_n(b)-G_n(a)\to G(b)-G(a),$$

则称$\{G_n,n\geqslant 1\}$淡收敛到$G$,记作$G_n\xrightarrow{v}G$. 试证下列说法等价:

(1) $G_n\xrightarrow{v}G$;

(2) 对每 $a,b\in \boldsymbol{R},a<b$,

$\limsup\limits_{n\to\infty}[G_n(b)-G_n(a-0)]\leqslant G(b)-G(a-0)$;

(3) 对每 $a,b\in \boldsymbol{R},a<b$,

$\liminf\limits_{n\to\infty}[G_n(b-0)-G_n(a)]\geqslant G(b-0)-G(a)$;

(4) 对每 $a,b\in C(G),a<b$ 和每$[a,b]$上的连续函数 $f$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}G_n(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x).$$

12. 证明系 4.1.5.

13. 设$\{\xi_n=(\xi_{n,1},\cdots,\xi_{n,k}),n\geqslant 1\}$和 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$是 $k$ 维随机向量. 证明:$\xi_n\xrightarrow{d}\xi$ 当且仅当对每$(a_1,\cdots,a_k)\in \boldsymbol{R}^k$,

$$\sum_{j=1}^{k}a_j\xi_{n,j}\xrightarrow{d}\sum_{j=1}^{k}a_j\xi_j.$$

14. 举例说明存在这样的随机向量列$\{(\xi_n,\eta_n),n\geqslant 1\}$,使对 $\boldsymbol{R}$ 中的 d.f. $F$ 和 $G$,有

$$\xi_n\xrightarrow{d}F,\quad \eta_n\xrightarrow{d}G,$$

但是$(\xi_n,\eta_n)$并不依分布收敛.

15. 设 $\mu$ 和$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$是$(C[0,1],\mathscr{R}_C[0,1])$上的概率测度. 证明:如果 $\mu_n\xrightarrow{w}\mu$,则对每 $0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant 1$,

$$\mu_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\xrightarrow{w}\mu\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}.$$

16. 证明对于r.v.序列的稳定收敛,定义4.1.5和定义4.1.6是等价的.

17. 证明定义 4.1.6 中出现的 $G$ 必是 m.d.f..

18. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$和$\xi$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的r.v.,称$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$稳定地依分布收敛到 $\xi$,记作 $\xi_n\xrightarrow{\text{s.d.}}\xi$,如果对每 $A\in\mathscr{F}$ 和 $\xi$ 的每一连续点 $x$ 有

$$P(\xi_n\leqslant x,A)\to P(\xi\leqslant x,A).$$

设$\xi,\eta,\{\xi_n,n\geqslant 1\}$和$\{\eta_n,n\geqslant 1\}$都是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上之 r. v.. 证明：如果

$$\xi_n \xrightarrow{\text{s.d.}} \xi, \quad \sup_{n\geqslant 1} E\xi_n^2 < \infty$$

以及 $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$，则

$$\xi_n\eta_n \xrightarrow{\text{s.d.}} \xi\eta.$$

19. 举例说明：存在同一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r. v. $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$和$\xi$，使

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi,$$

但是 $\xi_n \xrightarrow{\text{s.d.}} \xi$ 并不成立.

20. 称 q. d. f. 列$\{G_n,n\geqslant 1\}$弱收敛到 q. d. f. $G$，记作

$$G_n \xrightarrow{w} G,$$

如果对$\boldsymbol{R}$上任一有界连续函数$f$，有

$$\int_{\boldsymbol{R}} f\mathrm{d}G_n \to \int_{\boldsymbol{R}} f\mathrm{d}G.$$

把 q. c. f. 的全体记作$\mathcal{G}$，对任何$G_1,G_2\in\mathcal{G}$，令

$$L(G_1,G_2) = \inf\{\varepsilon > 0;\text{对每 } x\in\boldsymbol{R}, G_1(x-\varepsilon)-\varepsilon \leqslant G_2(x) \leqslant G_1(x+\varepsilon)+\varepsilon\}.$$

证明：

(1) $(\mathcal{G},L)$是完备可分距离空间；

(2) 如$G,G_n\in\mathcal{G},n\geqslant 1$，则$G_n \xrightarrow{w} G$当且仅当$L(G_n,G)\to 0$.

21. 记$(\mathcal{G},L)$如前. 证明：$\Omega$到$\mathscr{G}$的映射$T$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\mathcal{G},L)$的随机元当且仅当对每$x\in\boldsymbol{R}$，$T(x,\cdot)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r. v.，对每$\omega\in\Omega$，$T(\cdot,\omega)\in\mathscr{G}$.

22. 把概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\mathscr{G},L)$的随机元的全体记作$\mathscr{E}$. 证明：$G$是一个 m. d. f. 当且仅当它可以表为

$$G(x,A) = \int_A g(x,\cdot)\mathrm{d}P, \quad x \in \boldsymbol{R},$$

其中 $g\in\mathscr{E}$,对每 $\omega\in\Omega$,$g(\cdot,\omega)$是一个 d.f..

## 第二节 鞅的中心极限定理

### 2.1 基本引理

我们称满足 $k_n\uparrow\infty$的 r.v. 族$\{\xi_{n,k};k=1,\cdots,k_n;n\geqslant1\}$为一个 r.v. 阵列. 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}, \quad n\geqslant 1.$$

本节的中心议题是讨论$\{S_n,n\geqslant1\}$的弱收敛问题,即寻求存在 d.f. $G$ 使

$$S_n \xrightarrow{d} G \tag{4.2.1}$$

的条件. 当然,如果(4.2.1)对某 $G$ 成立,那么 $G$ 可以是一个很一般的 d.f.. 但是,人们最感兴趣的,也是实际中最有意义的往往是当 $G$ 是一个标准正态 d.f. 的情形. 这时候,我们称$\{S_n,n\geqslant1\}$服从中心极限定理. 本小节的任务是对一般的 r.v. 阵列给出一个形式上也很一般的中心极限定理,在以后的各小节再把它落实到 $L_2$ 鞅差阵列,一般适 r.v. 阵列以及一般鞅差阵列上去.

**引理 4.2.1** 存在 $\boldsymbol{R}$ 上的函数 $r$ 使

$$\exp(\mathrm{i}x) = (1+\mathrm{i}x)\exp[-x^2/2+r(x)] \tag{4.2.2}$$

对每 $x\in\boldsymbol{R}$ 成立而且当 $|x|\leqslant1$ 时

$$|r(x)| \leqslant |x|^3. \tag{4.2.3}$$

**证明** 设 $r(x)=p(x)+\mathrm{i}q(x)$,$x\in\boldsymbol{R}$. 我们来选取 $p,q$ 使它们决定的 $r$ 符合(4.2.2)和(4.2.3). 表

$$1+\mathrm{i}x = (1+x^2)^{1/2}\exp[\mathrm{i}(\mathrm{arctg}x)]$$

以此代入(4.2.2)得

$$\exp(ix)=(1+x^2)^{1/2}\exp[p(x)-x^2/2]\cdot\exp\{i[\mathrm{arctg}x+q(x)]\}.$$

由此不难见为使(4.2.2)成立可取

$$p(x)=[x^2-\ln(1+x^2)]/2;\quad q(x)=x-\mathrm{arctg}x.$$

用初等微积分方法易得，当$|x|\leqslant 1$时，

$$0\leqslant p(x)\leqslant |x|^3/4,\quad |q(x)|\leqslant |x|^3/3,$$

从而$|r(x)|=[p^2(x)+q^2(x)]^{1/2}\leqslant|x|^3$. 证完.

**引理 4.2.2** 设 r.v. 列$\{\eta_n,n\geqslant 1\}$满足$\sup\limits_{n\geqslant 1}E|\eta_n|<\infty$. 下列两命题成立：

(1) 如对某$\eta\in L_1$，有

$$\lim_{n\to\infty}E\eta_nI_A=E\eta I_A,\quad A\in\mathscr{F},\tag{4.2.4}$$

则对任一 r.v. $\zeta$，只要存在$C>0$使$|\zeta|\leqslant C$ a.s.，就有

$$\lim_{n\to\infty}E\eta_n\zeta=E\eta\zeta.\tag{4.2.5}$$

(2) 如$\zeta_n\xrightarrow{P}0$则$\eta_n\zeta_n\xrightarrow{P}0$.

**证明** 由(4.2.4)易知对任何简单函数$\zeta$，(4.2.5)成立. 对于 r.v. $\zeta$，如存在$C>0$使$|\zeta|\leqslant C$ a.s.，令$\Omega'=\{\omega:|\zeta(\omega)|\leqslant C\}$，那么一定可以取一串简单函数$\{\zeta_m,m\geqslant 1\}$，使$\zeta_m(\omega)\to\zeta(\omega)$对$\Omega'$中之$\omega$一致成立. 这样，对任给$\varepsilon>0$，只要$m$充分大，对一切$\omega\in\Omega'$就有$|\zeta_m(\omega)-\zeta(\omega)|<\varepsilon$，从而

$$\begin{aligned}&|E(\eta_n-\eta)\zeta|\\ \leqslant&|E(\eta_n-\eta)\zeta_m|+E|\eta_n||\zeta_m-\zeta|+E|\eta||\zeta_m-\zeta|\\ \leqslant&|E(\eta_n-\eta)\zeta_m|+\varepsilon\sup_{n\geqslant 1}E|\eta_n|+\varepsilon E|\eta|.\end{aligned}$$

于上式中先令$n\to\infty$，再令$\varepsilon\to 0$即得(4.2.5). 这证明了(1).

对任给$\varepsilon>0$，$M>0$，我们有

$$\begin{aligned}P(|\eta_n\zeta_n|\geqslant\varepsilon)&\leqslant P(|\eta_n\zeta_n|\geqslant\varepsilon,|\eta_n|<M)+P(|\eta_n|\geqslant M)\\ &\leqslant P(|\zeta_n|\geqslant\varepsilon/M)+\sup_{n\geqslant 1}E|\eta_n|/M.\end{aligned}$$

如果$\zeta_n \xrightarrow{P} 0$,在上式中先令$n\to\infty$,再令$M\to\infty$即得

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n\zeta_n| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

这又证明了(2).引理证完.

下面是我们称之为基本引理的结论.

**定理 4.2.3** 设$\{\xi_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant k_n, n\geqslant 1\}$是r.v.阵列,$\sigma$是一个r.v..对每$n\geqslant 1$,记

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}, \quad \eta_n(t) = \prod_{k=1}^{k_n} (1 + \mathrm{i}t\xi_{n,k}), \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

如果

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\xi_{n,k}| \xrightarrow{P} 0, \tag{4.2.6}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2, \tag{4.2.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\eta_n(t)I_A = P(A), \quad A \in \mathscr{F}, t \in \boldsymbol{R} \tag{4.2.8}$$

并且对每$t\in\boldsymbol{R}$,$\{\eta_n(t), n\geqslant 1\}$一致可积,则

$$S_n \xrightarrow{\text{s.d.}} G \tag{4.2.9}$$

成立,其中m.d.f.$G$由下式唯一确定:

$$\int_{\boldsymbol{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} G(\mathrm{d}x, A) = E[\exp(-\sigma^2 t^2/2)] I_A. \tag{4.2.10}$$

**证明** 取$r$如引理4.2.1,则对每$n\geqslant 1$,$t\in\boldsymbol{R}$,

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}tS_n) &= \prod_{k=1}^{k_n} \exp(\mathrm{i}t\xi_{n,k}) \\ &= \eta_n(t) \exp\left[-t^2 \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}^2/2 + \sum_{k=1}^{k_n} r(t\xi_{n,k})\right] \\ &= \eta_n(t)\exp(-\sigma^2 t^2/2) + \zeta_n(t), \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

其中我们记

$$\zeta_n(t)=\eta_n(t)\left\{\exp\left[-t^2\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2/2+\sum_{k=1}^{k_n}r(t\xi_{n,k})\right]-\exp(-\sigma^2t^2/2)\right\}.$$

由(4.2.8)和$\{\eta_n(t),n\geqslant1\}$的一致可积性，利用引理4.2.2之(1)立得

(4.2.12) $$\lim_{n\to\infty}E\eta_n(t)[\exp(-\sigma^2t^2/2)]I_A=E[\exp(-\sigma^2t^2/2)]I_A$$

对每$t\in R$和每$A\in\mathscr{F}$成立. 注意当$|t|\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|\leqslant1$时，

$$\left|\sum_{k=1}^{k_n}r(t\xi_{n,k})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}|t\xi_{n,k}|^3\leqslant t^3(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|)\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2.$$

又注意(4.2.6)和(4.2.7)蕴含$(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|)\sum\limits_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2\xrightarrow{P}0$，不难推知$\sum\limits_{k=1}^{k_n}r(t\xi_{n,k})\xrightarrow{P}0$. 这一事实和(4.2.7)一起又进一步表明

$$\exp\left[-t^2\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2/2+\sum_{k=1}^{k_n}r(t\xi_{n,k})\right]-\exp(-\sigma^2t^2/2)\xrightarrow{P}0$$

再由$\{\eta_n(t),n\geqslant1\}$的一致可积性及引理4.2.2,(2)即知

$$\zeta_n(t)\xrightarrow{P}0.$$

但是,$\{\exp(\mathrm{i}tS_n),n\geqslant1\}$和$\{\eta_n(t)\exp(-\sigma^2t^2/2),n\geqslant1\}$均一致可积,因而由(4.2.11)知$\{\zeta_n(t),n\geqslant1\}$一致可积,故我们知$E|\zeta_n(t)|\to0$(定理1.1.10). 由此可见

$$\lim_{n\to\infty}E\zeta_n(t)I_A=0,\quad A\in\mathscr{F}.$$

此式与(4.2.11)和(4.2.12)一起便推得

(4.2.13) $$\lim_{n\to\infty}E[\exp(\mathrm{i}tS_n)]I_A=E[\exp(-\sigma^2t^2/2)]I_A.$$

根据定理4.1.11,这就是(4.2.9)对由(4.2.10)决定的m.d.f. $G$成立. 证完.

上述定理是一个关于中心极限定理的相当一般的结论. 事实上,当$\sigma^2$是一个常数,(4.2.10)式就确定出

$$G(x,A)=\Phi(x/\sigma)I_A,$$

从而定理 4.2.3 的结论意味着一个比中心极限定理更强的命题

$$S_n \xrightarrow{\text{m.d.}} \Phi(\cdot/\sigma)$$

成立. 而且,这里并不排除 $\sigma=0$ 的情况——只要把 $\Phi(\cdot/0)$理解为集中在 0 的退化 d.f. 就行了.

设 $\sigma$ 是任意一 r.v. 而 $\xi\sim\Phi$ 与 $\sigma$ 独立,那么不难求出 $\sigma\xi$ 的 c.f. 是

$$E\exp(\mathrm{i}t\sigma\xi) = E\exp(-\sigma^2t^2/2).$$

在这个时候,由定理的结论推知

$$S_n \xrightarrow{d} \sigma\xi.$$

我们称 $\sigma\xi$ 对应的 d.f. 是标准正态分布的混合分布的 d.f.,而上式则称为 $S_n$ 依分布收敛到正态分布的混合. 这也许可以叫做广义的中心极限定理吧.

顺便说一下,定理 4.2.3 的条件还可以减弱. 具体地讲,$\{\eta_n(t),n\geqslant1\}$一致可积的条件是能去掉的,它实质上是条件(4.2.8)的一个推论. 但是,这件事情证明的过程比较长,而且去掉$\{\eta_n(t),n\geqslant1\}$一致可积的条件也不会加强我们以下各小节的任何一个结论. 所以,我们也就不在这一点上过分计较了.

## 2.2 平方可积鞅差阵列行和的中心极限定理

设 $k_n\uparrow\infty$. 如果对每 $n\geqslant1$,$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n\}$是一个(有限的)鞅差序列,也就是说

$$E(\xi_{n,k}|\mathscr{F}_{n,k-1}) = 0, \quad 1\leqslant k\leqslant k_n$$

(约定 $\mathscr{F}_{n,0}=\{\varnothing,\Omega\}$),又如果对 $n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant k_n$,

$$\mathscr{F}_{n,k}\subset\mathscr{F}_{n-1,k}, \tag{4.2.14}$$

那么我们将称$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant1\}$为一个鞅差阵列. 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}, \quad n\geqslant1,$$

并称之为鞅差阵列的行和序列. 本小节所要讨论的是关于$\{S_n, n\geq 1\}$的稳定收敛问题.

设$\{\xi_n, \mathscr{F}_n, n\geq 1\}$是一个鞅差序列，$\{a_n>0, n\geq 1\}$和$\{b_n, n\geq 1\}$是两个常数序列. 对每$n\geq 1, 1\leqslant k\leqslant n$，令

$$\xi_{n,k} = (\xi_k - b_n)/a_n, \quad \mathscr{F}_{n,k} = \mathscr{F}_n,$$

则不难验证$\{\xi_{n,k}, \mathscr{F}_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant n, n\geq 1\}$形成一个鞅差阵列. 这时候，对每$n\geq 1$，记$M_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$，则$\{M_n, \mathscr{F}_n, n\geq 1\}$是鞅. 而所造出来的鞅差阵列的行和就变成$\{S_n=(M_n-b_n)/a_n, n\geq 1\}$. 于是，一个鞅项$M_n$在适当标准化，即减去中心化常数$b_n$，除以正规化常数$a_n$以后的稳定收敛问题就纳入了鞅差阵列行和弱收敛问题的框架. 这种把寻求 r. v. 序列部分和的极限分布问题纳入 r. v. 阵列行和的框架以得到更一般问题的解的提法在弱收敛讨论中是常见的.

下面，我们给出平方可积鞅差阵列行和的中心极限定理.

**定理 4.2.4** 设$\{\xi_{n,k}, \mathscr{F}_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant k_n, n\geq 1\}$是$L_2$鞅差阵列，$\sigma^2$是非负 r. v.. 如果(4.2.6)，(4.2.7)和

(4.2.15) $$\sup_{n\geq 1}\left(E\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\xi_{n,k}^2\right) < \infty$$

成立，则(4.2.9)对由(4.2.10)决定的 m. d. f. $G$ 成立.

**证明** 对每$n\geq 1, 1\leqslant k\leqslant k_n$，记

$$\sigma_{n,k}^2 = \sum_{j=1}^{k}\xi_{n,j}^2$$

并且约定$\sigma_{n,0}^2=0$. 我们将分两步来完成定理的证明.

第一步　当$\sigma^2$是有界 r. v.，即对某$C>0, 0\leqslant\sigma^2\leqslant C$时，(4.2.9)成立.

无妨设$C>1$. 对每$n\geq 1, 1\leqslant k\leqslant k_n$，令

$$\tilde{\xi}_{n,k} = \xi_{n,k}I_{\{\sigma_{n,k-1}^2\leqslant 2C\}}; \quad \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{k_n}\tilde{\xi}_{n,k}.$$

由(4.2.7)我们得

$$
\begin{aligned}
&|E[\exp(\mathrm{i}tS_n)]I_A - E[\exp(\mathrm{i}t\widetilde{S}_n)]I_A| \\
&\quad\leqslant E|\exp(\mathrm{i}tS_n) - \exp(\mathrm{i}t\widetilde{S}_n)| \\
&\quad\leqslant 2P(S_n \neq \widetilde{S}_n) \leqslant 2P\Big(\bigcup_{k=1}^{k_n}\{\xi_{n,k} \neq \widetilde{\xi}_{n,k}\}\Big) \\
&\quad\leqslant 2P\Big(\bigcup_{k=1}^{k_n}\{\sigma^2_{n,k-1} > 2C\}\Big) \leqslant 2P(\sigma^2_{n,k_n} > 2C) \to 0.
\end{aligned}
$$

故为证(4.2.9)只需证(4.2.13)只需证

$$\lim_{n\to\infty} E[\exp(\mathrm{i}t\widetilde{S}_n)]I_A = E[\exp(-\sigma^2 t^2/2)]I_A.$$

注意(4.2.6)和(4.2.7)式以$\widetilde{\xi}_{n,k}$代替$\xi_{n,k}$以后仍然成立，故由定理4.2.3知为证上式又只需证$\Big\{\eta_n(t) =: \prod_{k=1}^{k_n}(1 + \mathrm{i}t\,\widetilde{\xi}_{n,k}), n \geqslant 1\Big\}$满足(4.2.8)并且一致可积.

对每$n\geqslant 1$，令

$$\tau_n = k_n \wedge \inf\{k: 1 \leqslant k \leqslant k_n, \sigma^2_{n,k} > 2C\}.$$

易见对每$n\geqslant 1$，$1\leqslant k\leqslant k_n$，当$k>\tau_n$时，$\widetilde{\xi}_{n,k}=0$. 故

$$
\begin{aligned}
|\eta_n(t)|^2 &= \prod_{k=1}^{k_n}(1 + t^2\,\widetilde{\xi}^2_{n,k}) \\
&= (1 + t^2\,\widetilde{\xi}^2_{n,\tau_n})\prod_{k=1}^{\tau_n-1}(1 + t^2\,\widetilde{\xi}^2_{n,k}) \\
&\leqslant (1 + t^2\,\widetilde{\xi}^2_{n,\tau_n})\prod_{k=1}^{\tau_n-1}\exp(t^2\,\widetilde{\xi}^2_{n,k}) \\
&= (1 + t^2\widetilde{\xi}^2_{n,\tau_n})\exp(t^2\sigma^2_{n,\tau_n-1}) \\
&\leqslant (1 + t^2\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\widetilde{\xi}^2_{n,k})\exp(2Ct^2), \quad n \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

据(4.2.15)，这表明$\sup_{n\geqslant 1}E|\eta_n(t)|^2<\infty$，从而$\{\eta_n(t), n\geqslant 1\}$一致可积(习题1.1之5). 因此，我们又只需再证(4.2.8)成立.

首先，我们证对每$m\geqslant 1$，

(4.2.16) $$\lim_{n\to\infty} E\eta_n(t)I_A = P(A),\quad t\in \boldsymbol{R}, A\in \mathscr{F}_{m,k_m}.$$

为此，注意$\{\widetilde{\xi}_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$仍是 $L_2$ 鞅差阵列并且(4.2.14)成立，当 $n>\max\{j:k_j=k_m\}$时

$$\begin{aligned}
E\eta_n(t)I_A &= EI_A\prod_{k=1}^{k_n}(1+\mathrm{i}t\,\widetilde{\xi}_{n,k})\\
&= E\{[I_A\prod_{k=1}^{k_n-1}(1+\mathrm{i}t\,\widetilde{\xi}_{n,k})]E(1+\mathrm{i}t\,\widetilde{\xi}_{n,k_n}|\mathscr{F}_{n,k_{n-1}})\\
&= EI_A\prod_{k=1}^{k_n-1}(1+\mathrm{i}t\,\widetilde{\xi}_{n,k}) = \cdots\\
&= EI_A\prod_{k=1}^{k_m}(1+\mathrm{i}t\,\widetilde{\xi}_{n,k})\\
&= P(A)+\sum_{r=1}^{k_m}(\mathrm{i}t)^r\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_r\leqslant k_m}E\,\widetilde{\xi}_{n,k_1}\cdots\widetilde{\xi}_{n,k_r}I_A.
\end{aligned}$$

但是，对每 $n\geqslant 1,1\leqslant k\leqslant k_n$，可表

$$\widetilde{\xi}_{n,k}=\xi_{n,k}I_{\{\tau_n\geqslant k\}}.$$

因而

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{r=1}^{k_m}(\mathrm{i}t)^r\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_r\leqslant k_m}E\,\widetilde{\xi}_{n,k_1}\cdots\widetilde{\xi}_{n,k_r}I_A\right|\\
&\leqslant |t|^{k_m}\sum_{r=1}^{k_m}\sum_{1\leqslant k_1<\cdots<k_r\leqslant k_m}E|\xi_{n,k_1}\cdots\xi_{n,k_r}|I_{\{\tau_n\geqslant k_r\}}\\
&\leqslant |t|^{k_m}\sum_{r=1}^{k_m}\binom{k_m}{r}E(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|)\Big(\sum_{k=1}^{\tau_n-1}\xi_{n,k}^2\Big)^{(r-1)/2}\\
&\leqslant (2C|t|)^{k_m}(2^{k_m}-1)E\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|.
\end{aligned}$$

此外，(4.2.15)表明$\{\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|,n\geqslant 1\}$一致可积，因而(4.2.6)又蕴含

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_{n,k}|\to 0$$
(定理 1.1.10). 故(4.2.16)确实成立.

其次,记 $\mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{n,k_n}\right)$,我们来证

(4.2.17) $\quad \lim_{n\to\infty}E\eta_n(t)I_A=P(A),\quad t\in\boldsymbol{R},A\in\mathscr{F}_\infty$

成立. 对任意的 $A\in\mathscr{F}_\infty$ 和任意的 $m\geqslant 1$, $A_m\in\mathscr{F}_{m,k_m}$,我们有

(4.2.18)
$$\begin{aligned}&|E\eta_n(t)I_A-P(A)|\\ \leqslant&\sup_{n\geqslant 1}E|\eta_n(t)|I_{A\triangle A_m}+|E\eta_n(t)I_{A_m}-P(A_m)|\\ &+P(A\triangle A_m).\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{F}_\infty$ 是域 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{n,k_n}$ 生成的 $\sigma$ 域,故对每 $A\in\mathscr{F}_\infty$ 可选取 $\{A_m\in\mathscr{F}_{m,k_m},m\geqslant 1\}$ 使

$$P(A\triangle A_m)\to 0,\quad m\to\infty.$$

对这样选取的 $\{A_m,m\geqslant 1\}$,由 $\{\eta_n(t),n\geqslant 1\}$ 的一致可积性又推知

$$\sup_{n\geqslant 1}E|\eta_n(t)|I_{A\wedge A_m}\to 0,\quad m\to\infty.$$

于是,利用已证之(4.2.16)式,在(4.2.18)中先令 $n\to\infty$ 再令 $m\to\infty$ 即得(4.2.17).

最后,注意 $\eta_n(t)$ 关于 $\mathscr{F}_\infty$ 可测,由(4.2.17)和引理 4.2.2 之(1)推知,对每 $A\in\mathscr{F}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}E\eta_n(t)I_A&=\lim_{n\to\infty}E[\eta_n(t)E(I_A|\mathscr{F}_\infty)]\\ &=E[E(I_A|\mathscr{F}_\infty)]=P(A)\end{aligned}$$

成立. 这就完成了第一步的证明.

第二步　对任意非负 r.v. $\sigma^2$, (4.2.9)成立.

对每 $C>0$,每 $n\geqslant 1$, $1\leqslant k\leqslant k_n$,记 $\hat{\xi}_{n,k}=\xi_{n,k}I_{(\sigma^2_{n,k-1}\leqslant C)}$,则

$$\hat{\sigma}^2_{n,k_n}:=\sum_{k=1}^{k_n}\hat{\xi}^2_{n,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}^2 I_{\{\sigma_{n,k-1}^2 \leqslant C\}}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}^2 \sum_{l=k}^{k_n} I_{\{\sigma_{n,l-1}^2 \leqslant C, \sigma_{n,l}^2 > C\}} + \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}^2 I_{\{\sigma_{n,k_n}^2 \leqslant C\}}$$

$$= \sum_{l=1}^{k_n} \sigma_{n,l}^2 I_{\{\sigma_{n,l-1}^2 \leqslant C, \sigma_{n,l}^2 > C\}} + \sigma_{n,k_n}^2 I_{\{\sigma_{n,k_n}^2 \leqslant C\}}.$$

由此可见，对每 $n \geqslant 1$，

$$CI_{\{\sigma_{n,k_n}^2 > C\}} + \sigma_{n,k_n}^2 I_{\{\sigma_{n,k_n}^2 \leqslant C\}}$$

$$\leqslant \hat{\sigma}_{n,k_n}^2 \leqslant (C + \max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} \xi_{n,k}^2) I_{\{\sigma_{n,k_n}^2 > C\}} + \sigma_{n,k_n}^2 I_{\{\sigma_{n,k_n}^2 \leqslant C\}}.$$

取 $C$ 为 $\sigma^2$ 的连续点，在上式中令 $n \to \infty$，则由(4.2.6)和(4.2.7)推得(习题 1.1 之 6)

$$\hat{\sigma}_{n,k_n}^2 \xrightarrow{P} \sigma_C^2 =: CI_{\{\sigma^2 > C\}} + \sigma^2 I_{\{\sigma^2 \leqslant C\}}.$$

把第一步所证得的结论用于$\{\hat{\xi}_{n,k}, \mathscr{F}_{n,k}, 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$并记 $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{k_n} \hat{\xi}_{n,k}$，我们得

$$\lim_{n \to \infty} E[\exp(\mathrm{i}t\hat{S}_n)]I_A = E[\exp(-\sigma_C^2 t^2/2)]I_A.$$

由于对每 $n \geqslant 1$，

$$|E[\exp(\mathrm{i}tS_n)]I_A - E[\exp(\mathrm{i}t\hat{S}_n)]I_A|$$

$$\leqslant 2P\Big(\bigcup_{k=1}^{k_n} \{\xi_{n,k} \neq \hat{\xi}_{n,k}\}\Big) \leqslant 2P(\sigma_{n,k_n}^2 > C),$$

我们又得

$$\limsup_{n \to \infty} |E[\exp(\mathrm{i}tS_n)]I_A - E[\exp(\mathrm{i}t\hat{S}_n)]I_A| \leqslant 2P(\sigma^2 > C).$$

于是当 $C$ 是 $\sigma^2$ 的连续点时，在不等式

$$|E[\exp(\mathrm{i}tS_n)]I_A - E[\exp(-\sigma^2 t^2/2)]I_A|$$

$$\leqslant |E[\exp(\mathrm{i}tS_n)]I_A - E[\exp(\mathrm{i}t\hat{S}_n)]I_A|$$

$$+ |E[\exp(\mathrm{i}t\hat{S}_n)]I_A - E[\exp(-\sigma_C^2 t^2/2)]I_A|$$

$$+ |E[\exp(-\sigma_C^2 t^2/2)]I_A - E[\exp(-\sigma^2 t^2/2)]I_A|$$

中令 $n\to\infty$,便有

$$\limsup_{n\to\infty}|E[\exp(itS_n)]I_A - E[\exp(-\sigma^2 t^2/2)]I_A|$$

$$\leqslant 2P(\sigma^2>C)+|E[\exp(-\sigma_C^2 t^2/2)]I_A - E[\exp(-\sigma^2 t^2/2)]I_A|$$

$$\leqslant 4P(\sigma^2>C).$$

在上式中再令 $C$ 沿着 $\sigma^2$ 的连续点趋于$\infty$,便得(4.2.13). 据定理 4.1.11,这证得了(4.2.9). 定理证完.

## 2.3 一般适 r.v. 阵列的中心极限定理

我们将利用定理 4.2.4 来推导一般适 r.v. 阵列的中心极限定理. 这里,如果对每 $n\geqslant 1$, $\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n\}$ 是适的并且 $k_n\uparrow\infty$ 和(4.2.14)成立,则把 $\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 称为适 r.v. 阵列,记 $S_n=\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k},n\geqslant 1$. 先证明若干引理.

**引理 4.2.5** 设 $\{\mathscr{F}_k,0\leqslant k\leqslant n\}$ 是非降 $\sigma$ 代数族(注意此处与其他地方不同,不必假定 $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$). 如果 $\eta\geqslant 0$ a.s.,且 $\eta$ 关于 $\mathscr{F}_0$ 可测,则对任何 $\{A_k\in\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$,有

$$(4.2.19)\quad P\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k|\mathscr{F}_0\Big)\leqslant\eta+P\Big(\sum_{k=1}^n P(A_k|\mathscr{F}_{k-1})>\eta|\mathscr{F}_0\Big)\ \text{a.s.}.$$

**证明** 注意

$$(4.2.20)\quad P\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k|\mathscr{F}_0\Big)I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta\}}$$
$$\leqslant I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta\}}$$
$$\leqslant[\eta+I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta\}}]I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta\}}$$
$$=[\eta+P(P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta|\mathscr{F}_0)]I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta\}}$$
$$\leqslant\Big[\eta+P\Big(\sum_{k=1}^n P(A_k|\mathscr{F}_{k-1})>\eta|\mathscr{F}_0\Big)\Big]I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta\}}\ \text{a.s.}.$$

为证(4.2.19),只需再证

$$(4.2.21)\quad P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\,|\,\mathscr{F}_0\Big)I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)\leqslant\eta\}}$$

$$\leqslant\Big[\eta+P\Big(\sum_{k=1}^{n}P(A_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})>\eta\,|\,\mathscr{F}_0\Big)\Big]I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)\leqslant\eta\}}\ \text{a.s.}.$$

当 $n=1$ 时,(4.2.21)显然成立. 如果当 $n=p-1$ 时,(4.2.21)成立,那么加上(4.2.20)就知对任一 $\mathscr{F}_1$ 可测之 $\eta_1\geqslant 0$ a.s.有

$$P\Big(\bigcup_{k=2}^{p}A_k\,|\,\mathscr{F}_1\Big)\leqslant\eta_1+P\Big(\sum_{k=2}^{p}P(A_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})>\eta_1\,|\,\mathscr{F}_1\Big)\quad\text{a.s.}.$$

在上式中取

$$\eta_1=[\eta-P(A_1\,|\,\mathscr{F}_0)]I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)\leqslant\eta\}},$$

便得

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{p}A_k\,|\,\mathscr{F}_0\Big)$$

$$\leqslant P(A_1\,|\,\mathscr{F}_0)+P\Big(\bigcup_{k=2}^{p}A_k\,|\,\mathscr{F}_0\Big)$$

$$=P(A_1\,|\,\mathscr{F}_0)+E\Big[P\Big(\bigcup_{k=2}^{p}A_k\,|\,\mathscr{F}_1\Big)\,|\,\mathscr{F}_0\Big]$$

$$\leqslant P(A_1\,|\,\mathscr{F}_0)+E\Big[\eta_1+P\Big(\sum_{k=2}^{p}P(A_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})>\eta_1\,|\,\mathscr{F}_1\Big)\,|\,\mathscr{F}_0\Big]$$

$$=P(A_1\,|\,\mathscr{F}_0)+\eta_1+P\Big(\sum_{k=2}^{p}P(A_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})>\eta_1\,|\,\mathscr{F}_0\Big)\quad\text{a.s.}.$$

上式两端再乘以 $I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)>\eta\}}$ 并且注意

$$P\Big(\sum_{k=2}^{p}P(A_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})>\eta_1\,|\,\mathscr{F}_0\Big)I_{\{P(A_1|\mathscr{F}_0)\leqslant\eta\}}$$

$$=P\Big(\sum_{k=2}^{p}P(A_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})>\eta_1,P(A_1\,|\,\mathscr{F}_0)\leqslant\eta\,|\,\mathscr{F}_0\Big)$$

$$= P\Big( \sum_{k=1}^{p} P(A_k | \mathscr{F}_{k-1}) > \eta, P(A_1 | \mathscr{F}_0) \leqslant \eta | \mathscr{F}_0 \Big)$$

$$= P\Big( \sum_{k=1}^{p} P(A_k | \mathscr{F}_{k-1}) > \eta | \mathscr{F}_0 \Big) I_{\{P(A_1 | \mathscr{F}_0) \leqslant \eta\}}$$

即知(4.2.21)对 $n=p$ 也成立. 这样, 我们就用归纳法证明了(4.2.21). 引理证完.

**引理 4.2.6** 设对每 $n \geqslant 1$, $\{\mathscr{F}_{n,k}, 1 \leqslant k \leqslant k_n\}$ 是非降 $\sigma$ 域族, 记 $\mathscr{F}_{n,0} = \{\varnothing, \Omega\}$. 又设对每 $n \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $A_{n,k} \in \mathscr{F}_{n,k}$. 则

$$P\Big( \bigcup_{k=1}^{k_n} A_{n,k} \Big) \to 0 \tag{4.2.22}$$

当且仅当

$$\sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k} | \mathscr{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0, \tag{4.2.23}$$

**证明** 对每 $\delta > 0$, 由(4.2.19)知

$$P\Big( \bigcup_{k=1}^{k_n} A_{n,k} \Big) \leqslant \delta + P\Big( \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k} | \mathscr{F}_{n,k-1}) > \delta \Big).$$

由此可见(4.2.23)蕴含(4.2.22).

注意对每 $\delta > 0$, 由 Chebyshev 不等式推知

$$P\Big( \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k} | \mathscr{F}_{n,k-1}) > \delta, \bigcap_{k=1}^{k_n} A_{n,k}^c \Big)$$

$$\leqslant P\Big( \Big[ \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,k} | \mathscr{F}_{n,k-1}) \Big] \prod_{k=1}^{k_n} I_{A_{n,k}^c} > \delta \Big)$$

$$\leqslant P\Big( \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,1}^c \cap \cdots \cap A_{n,k-1}^c \cap A_{n,k} | \mathscr{F}_{n,k-1}) > \delta \Big)$$

$$\leqslant E \sum_{k=1}^{k_n} P(A_{n,1}^c \cap \cdots \cap A_{n,k-1}^c \cap A_{n,k} | \mathscr{F}_{n,k-1}) / \delta$$

$$= P\Big( \bigcup_{k=1}^{k_n} A_{n,k} \Big) / \delta,$$

我们又得

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\sum_{k=1}^{k_n}P(A_{n,k}|\mathscr{F}_{n,k-1})>\delta\Big)\\
&\quad\leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{k_n}P(A_{n,k}|\mathscr{F}_{n,k-1})>\delta,\ \bigcap_{k=1}^{k_n}A_{n,k}^c\Big)+P\Big(\bigcup_{k=1}^{k_n}A_{n,k}\Big)\\
&\quad\leqslant(1+1/\delta)P\Big(\bigcup_{k=1}^{k_n}A_{n,k}\Big).
\end{aligned}
$$

由此可见(4.2.22)又蕴含(4.2.23).证完.

**引理 4.2.7** 设$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是适 r.v. 阵列,对每 $n\geqslant 1,1\leqslant k\leqslant k_n$,记

$$
\sigma_{n,k}^2=\sum_{j=1}^{k}\xi_{n,j}^2,
$$

$$
\eta_{n,k}^2=\sum_{j=1}^{k}E(\xi_{n,j}^2|\mathscr{F}_{n,j-1}).
$$

如果

$$
\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}P(\eta_{n,k_n}^2>\lambda)=0 \tag{4.2.24}
$$

成立并且对任给 $\varepsilon>0$,

$$
\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}^2I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}}|\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0 \tag{4.2.25}
$$

成立,则

$$
\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\sigma_{n,k}^2-\eta_{n,k}^2|\xrightarrow{P}0. \tag{4.2.26}
$$

**证明** 对每 $\varepsilon>0$,每 $n\geqslant 1$ 和 $1\leqslant k\leqslant k_n$,令

$$
\zeta_{n,k}=\xi_{n,k}^2I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}}-E(\xi_{n,k}^2I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}}|\mathscr{F}_{n,k-1}),
$$

则可表

$$
\sigma_{n,k}^2-\eta_{n,k}^2=\sum_{j=1}^{k}\zeta_{n,j}+\sum_{j=1}^{k}\xi_{n,j}^2I_{\{|\xi_{n,j}|>\varepsilon\}}
$$

$$- \sum_{j=1}^{k} E(\xi_{n,j}^2 I_{\{|\xi_{n,j}|>\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}).$$

由此我们得：对任 $\delta>0, \varepsilon>0$,

(4.2.27) $$P(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\sigma_{n,k}^2 - \eta_{n,k}^2| > \delta) \leqslant I_{n,1} + I_{n,2} + I_{n,3},$$

其中

$$I_{n,1} := P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\left|\sum_{j=1}^{k}\zeta_{n,j}\right| > \delta/3\right);$$

$$I_{n,2} := P\left(\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}} > \delta/3\right);$$

$$I_{n,3} := P\left(\sum_{k=1}^{k_n} E(\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}) > \delta/3\right).$$

注意 $\{\zeta_{n,k}, \mathscr{F}_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant k_n, n\geqslant 1\}$ 是一个鞅差阵列，因而 $\left\{\left(\sum_{j=1}^{k}\zeta_{n,j} I_{\{\eta_{n,j}^2\leqslant\lambda\}}\right)^2, \mathscr{F}_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant k_n, n\geqslant 1\right\}$ 是一个下鞅，由 Doob 不等式(2.4.1)立得（约定 $\eta_{n,k_n+1}^2 = \infty$）

$$\begin{aligned}
& P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\left|\sum_{j=1}^{k}\zeta_{n,j}\right| > \delta/3, \eta_{n,k_n}^2 \leqslant \lambda\right) \\
&\leqslant P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\left(\sum_{j=1}^{k}\zeta_{n,j} I_{\{\eta_{n,j}^2\leqslant\lambda\}}\right)^2 > \delta^2/9\right) \\
&\leqslant (9/\delta^2)\sum_{j=1}^{k_n} E[I_{\{\eta_{n,j}^2\leqslant\lambda\}} E(\zeta_{n,j}^2 | \mathscr{F}_{n,j-1})] \\
&\leqslant (9/\delta^2)\sum_{j=1}^{k_n} E[I_{\{\eta_{n,j}^2\leqslant\lambda\}} E(\xi_{n,j}^4 I_{\{|\xi_{n,j}|\leqslant\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,j-1})] \\
&\leqslant (9\varepsilon^2/\delta^2)\sum_{j=1}^{k_n} E[I_{\{\eta_{n,j}^2\leqslant\lambda\}} E(\xi_{n,j}^2 | \mathscr{F}_{n,j-1})] \\
&= (9\varepsilon^2/\delta^2)\sum_{j=1}^{k_n}\sum_{k=j}^{k_n} E[I_{\{\eta_{n,k}^2\leqslant\lambda, \eta_{n,k+1}^2>\lambda\}} E(\xi_{n,j}^2 | \mathscr{F}_{n,j-1})]
\end{aligned}$$

$$= (9\varepsilon^2/\delta^2)\sum_{k=1}^{k_n} E\eta_{n,k}^2 I_{(\eta_{n,k}^2\leqslant\lambda,\eta_{n,k-1}^2>\lambda)}$$

$$\leqslant 9\lambda\varepsilon^2/\delta^2$$

对任何 $\lambda,\varepsilon,\delta>0$ 和 $n\geqslant1$ 成立. 于是

$$I_{n,1}\leqslant 9\lambda\varepsilon^2/\delta^2+\sup_{n\geqslant1}P(\eta_{n,k_n}^2>\lambda),\quad n\geqslant1$$

对任何 $\lambda,\varepsilon,\delta>0$ 成立. 对任 $\gamma>0,n\geqslant1$,把引理 4.2.5 用于 $A_k=\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}$,又得

$$I_{n,2}\leqslant P\Big(\bigcup_{k=1}^{k_n}\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}\Big)\leqslant\gamma+P\Big(\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|>\varepsilon|\mathscr{F}_{n,k-1})>\gamma\Big)$$

$$\leqslant\gamma+P\Big(\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}^2 I_{(|\xi_{n,k}|>\varepsilon)}|\mathscr{F}_{n,k-1})>\varepsilon^2\gamma\Big).$$

于是,在(4.2.27)中令 $n\to\infty$,由(4.2.25)知

$$\limsup_{n\to\infty}P(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\sigma_{n,k}^2-\eta_{n,k}^2|>\delta)$$

$$\leqslant 9\lambda\varepsilon^2/\delta^2+\sup_{n\geqslant1}P(\eta_{n,k_n}^2>\lambda)+\gamma$$

对任何 $\varepsilon,\lambda,\gamma$ 和 $\delta>0$ 成立. 在上式中依次令 $\gamma\to0,\varepsilon\to0$ 和 $\lambda\to\infty$,由(4.2.24)推知对任何 $\delta>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P(\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\sigma_{n,k}^2-\eta_{n,k}^2|>\delta)=0.$$

此即(4.2.26). 证完.

**引理 4.2.8** 设$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant1\}$是适 r. v. 阵列,对每 $n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant k_n$,记

$$\sigma_{n,k}^2=\sum_{j=1}^{k}\xi_{n,j}^2;$$

$$\eta_{n,k}^2(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{k}E(\xi_{n,j}^2 I_{(|\xi_{n,j}|\leqslant\varepsilon)}|\mathscr{F}_{n,j-1}),\quad\varepsilon>0.$$

则在(4.2.6)之下,对任意非负 r. v. $\sigma^2$,(4.2.7)等价于

(4.2.28) $$\eta_n^2(\varepsilon):=\eta_{n,k_n}^2(\varepsilon)\xrightarrow{P}\sigma^2$$

对某个 $\varepsilon>0$ 成立或对每个 $\varepsilon>0$ 成立.

**证明** 由于对每 $\varepsilon>0$ 和 $\delta\in(0,\varepsilon^2)$,

$$\{\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}=\bigcup_{k=1}^{k_n}\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}}>\delta\right\},$$

故(4.2.6)等价于对每 $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}}\xrightarrow{P}0.$$

因此,如(4.2.6)成立,(4.2.7)等价于对某或对任 $\varepsilon>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}}\xrightarrow{P}\sigma^2.$$

这样,为证引理,只需证明上式与(4.2.28)等价. 而为了证明这个等价性,又只需证

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\tilde{\sigma}_{n,k}^2-\tilde{\eta}_{n,k}^2|\xrightarrow{P}0, \tag{4.2.29}$$

其中对每 $n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant k_n$,我们记

$$\tilde{\xi}_{n,k}=\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}};$$

$$\tilde{\sigma}_{n,k}^2=\sum_{j=1}^{k}\tilde{\xi}_{n,j}^2;$$

$$\tilde{\eta}_{n,k}^2=\eta_{n,k}^2(\varepsilon).$$

把引理 4.2.6 用于 $A_{n,k}=\{|\xi_{n,k}|>\delta\},\delta>0,n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant k_n$. 我们知(4.2.6)等价于对每 $\delta>0$

$$\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|>\delta|\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0,$$

因而当(4.2.6)成立时

$$\sum_{k=1}^{k_n}E(\tilde{\xi}_{n,k}^2 I_{\{|\tilde{\xi}_{n,k}|>\delta\}}|\mathscr{F}_{n,k-1})$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{k_n} P(|\tilde{\xi}_{n,k}| > \delta | \mathscr{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0.$$

于是，对适 r. v. 阵列$\{\tilde{\xi}_{n,k}, \mathscr{F}_{n,k}, 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$引用引理 4.2.7，为证(4.2.29)，只需再证

(4.2.30) $$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} P(\tilde{\eta}^2_{n,k_n} > \lambda) = 0.$$

当(4.2.28)成立，即 $\tilde{\eta}^2_{n,k_n} \xrightarrow{P} \sigma^2$ 时，(4.2.30)显然成立. 故为证引理，又只需证当(4.2.7)或等价地

$$\tilde{\sigma}^2_{n,k_n} = \sum_{k=1}^{k_n} \xi^2_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}| \leqslant \varepsilon\}} \xrightarrow{P} \sigma^2$$

成立时，(4.2.30)仍成立. 注意对每 $\gamma > 0, \lambda > 0$，

$$\begin{aligned}
& P(\tilde{\eta}^2_{n,k_n} > \lambda, \tilde{\sigma}^2_{n,k_n} \leqslant \gamma) \\
& \leqslant P\Big(\sum_{k=1}^{k_n} E(\tilde{\xi}^2_{n,k} I_{\{\tilde{\sigma}^2_{n,k-1} \leqslant \gamma\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}) > \lambda\Big) \\
& \leqslant \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{k_n} E\, \tilde{\xi}^2_{n,k} I_{\{\tilde{\sigma}^2_{n,k-1} \leqslant \gamma\}} \\
& = \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{k_n} \Big[\sum_{j=k}^{k_n} E\, \tilde{\xi}^2_{n,k} I_{\{\tilde{\sigma}^2_{n,j-1} \leqslant \gamma, \tilde{\sigma}^2_{n,j} > \gamma\}} + \tilde{\xi}^2_{n,k} I_{\{\tilde{\sigma}^2_{n,k_n} \leqslant \gamma\}}\Big] \\
& = \lambda^{-1} \Big[\sum_{j=1}^{k_n} E(\tilde{\sigma}^2_{n,j-1} + \tilde{\xi}^2_{n,j}) I_{\{\tilde{\sigma}^2_{n,j-1} \leqslant \gamma, \tilde{\sigma}^2_{n,j} > \gamma\}} + \tilde{\sigma}^2_{n,k_n} I_{\{\tilde{\sigma}^2_{n,k_n} \leqslant \gamma\}}\Big] \\
& \leqslant (\gamma + \varepsilon^2)/\lambda,
\end{aligned}$$

我们得

$$P(\tilde{\eta}^2_{n,k_n} > \lambda) \leqslant (\gamma + \varepsilon^2)/\lambda + P(\tilde{\sigma}^2_{n,k_n} > \gamma).$$

取 $\gamma$ 为 $\sigma^2$ 的连续点，在上式中令 $n \to \infty$，我们得

$$\limsup_{n\to\infty} P(\tilde{\eta}^2_{n,k_n} > \lambda) \leqslant (\gamma + \varepsilon^2)/\lambda + P(\sigma^2 > \gamma)$$

(见习题 1.1 之 6). 此式先令 $\lambda \to \infty$，再令 $\gamma \to \infty$ 即得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\tilde{\eta}^2_{n,k_n} > \lambda) = 0,$$

而后者与(4.2.30)等价.证完.

下面是关于适 r.v.阵列的中心极限定理.

**定理 4.2.9** 设适 r.v.阵列$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$满足条件:对每 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|>\varepsilon|\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0; \tag{4.2.31}$$

存在 $\varepsilon_0>0$ 使

$$\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}I_{(|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon_0)}|\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0; \tag{4.2.32}$$

$$\sum_{k=1}^{k_n}\operatorname{var}(\xi_{n,k}I_{(|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon_0)}|\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}\sigma^2, \tag{4.2.33}$$

其中 $\sigma^2$ 是一非负 r.v..则(4.2.9)对由(4.2.10)确定之 $G$ 成立.

**证明** 对每 $n\geqslant 1,1\leqslant k\leqslant k_n$,令

$$\tilde{\xi}_{n,k}=\xi_{n,k}I_{(|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon_0)}-E(\xi_{n,k}I_{(|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon_0)}|\mathscr{F}_{n,k-1}).$$

则$\{\tilde{\xi}_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是 $L_2$ 鞅差序列.由引理 4.2.6 可知(4.2.31)等价于(4.2.6).但(4.2.6)蕴含

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\tilde{\xi}_{n,k}|\leqslant 2E\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|I_{(|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon_0)}\to 0,$$

故更有

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\tilde{\xi}_{n,k}|\xrightarrow{P}0.$$

注意上式蕴含

$$\sum_{k=1}^{k_n}E(\tilde{\xi}^2_{n,k}I_{(|\tilde{\xi}_{n,k}|>\delta)}|\mathscr{F}_{n,k-1})$$

$$\leqslant 4\varepsilon_0^2\sum_{k=1}^{k_n}P(|\tilde{\xi}_{n,k}|>\delta|\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0,\quad \delta>0,$$

而后者与条件(4.2.33)一起又说明

$$\sum_{k=1}^{k_n} E(\widetilde{\xi}_{n,k}^2 I_{\{|\widetilde{\xi}_{n,k}|\leqslant\delta\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} \sigma^2$$

对任何 $\delta>0$ 成立，故由引理 4.2.8 又知

$$\sum_{k=1}^{k_n} \widetilde{\xi}_{n,k}^2 \to \sigma^2.$$

最后，显然有

$$E \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} \widetilde{\xi}_{n,k}^2 \leqslant 4\varepsilon_0^2, \quad n \geqslant 1.$$

这样我们就对$\{\widetilde{\xi}_{n,k}, \mathscr{F}_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant k_n, n\geqslant 1\}$验证了定理 4.2.4 的全部条件. 由此可见，记 $\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{k_n} \widetilde{\xi}_{n,k}$，则

$$\lim_{n\to\infty} E[\exp(it\widetilde{S}_n)]I_A = E[\exp(-\sigma^2 t^2/2)]I_A, \quad A \in \mathscr{F}.$$

但是，记 $\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon_0\}}$，则由(4.2.31)知

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n \neq \hat{S}_n) = 0,$$

由(4.2.32)知

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{S}_n - \widetilde{S}_n| > \delta) = 0,$$

从而在下式

$$\begin{aligned}
&|E[\exp(it\widetilde{S}_n)]I_A - E[\exp(itS_n)]I_A| \\
&\quad \leqslant E|\exp(it\widetilde{S}_n) - \exp(it\hat{S}_n)| I_{\{|\widetilde{S}_n - \hat{S}_n|\leqslant\delta\}} \\
&\qquad + E|\exp(it\widetilde{S}_n) - \exp(it\hat{S}_n)| I_{\{|\widetilde{S}_n - \hat{S}_n|>\delta\}} \\
&\qquad + E|\exp(it\hat{S}_n) - \exp(itS_n)| \\
&\quad \leqslant |t|\delta + 2P(|\widetilde{S}_n - \hat{S}_n| > \delta) + 2P(S_n \neq \hat{S}_n)
\end{aligned}$$

中先令 $n\to\infty$ 再令 $\delta\to 0$ 而得到：

$$\lim_{n\to\infty} |E[\exp(it\hat{S}_n)]I_A - E[\exp(itS_n)]I_A| = 0, \quad A \in \mathscr{F}.$$

这样，我们就得到(4.2.13)，也就证完了定理.

通常，对于 $\varepsilon>0$，我们把 $\xi I_{\{|\xi|<\varepsilon\}}$ 称为 r. v. $\xi$ 的截尾. 这样，

(4.2.31)—(4.2.32)就是分别加在适 r.v. 阵列截尾的条件概率、条件期望和条件方差上的条件. 应该指出，这种通过截尾来研究原 r.v. 渐近性质的方法是十分重要的.

### 2.4 鞅差阵列的中心极限定理

现在，我们再回过头来讨论鞅差阵列的中心极限定理. 根据一般文献上的术语，如果对任给 $\epsilon>0$，(4.2.25)成立，就称鞅差阵列 $\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$满足条件 Lindeberg 条件 .

**定理 4.2.10** 如果鞅差阵列$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$满足条件 Lindeberg 条件，那么在条件(4.2.7)或条件

(4.2.34) $$\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}^2\mid\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}\sigma^2$$

之下，(4.2.9)对 $S_n=\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}$ 及由(4.2.10)确定的 $G$ 成立.

**证明** 首先，在条件 Lindeberg 条件之下有

(4.2.35) $$\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|>\epsilon\mid\mathscr{F}_{n,k-1})$$
$$\leqslant\epsilon^{-2}\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}^2I_{(|\xi_{n,k}|>\epsilon)}\mid\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0,\quad\epsilon>0$$

即(4.2.31)成立. 其次，在条件 Lindeberg 条件之下，

$$\left|\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}I_{(|\xi_{n,k}|>\epsilon)}\mid\mathscr{F}_{n,k-1})\right|$$
$$\leqslant\epsilon^{-1}\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}^2I_{(|\xi_{n,k}|>\epsilon)}\mid\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0,\quad\epsilon>0.$$

因而由鞅差性质推知

$$\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}I_{(|\xi_{n,k}|\leqslant\epsilon)}\mid\mathscr{F}_{n,k-1})$$

$$= -\sum_{k=1}^{k_n} E(\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0, \quad \varepsilon > 0,$$

即(4.2.32)成立. 最后,由鞅差性质及条件矩不等式知在条件 Lindeberg 条件之下,

$$\sum_{k=1}^{k_n} E^2(\xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} E^2(\xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1})$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_n} E(\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} 0, \quad \varepsilon > 0.$$

此外,Lindeberg 条件和(4.2.34)又给出

$$(4.2.36) \quad \sum_{k=1}^{k_n} E(\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} \sigma^2, \quad \varepsilon > 0,$$

因此,当 Lindeberg 条件和(4.2.34)都满足时,

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{var}(\xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{k_n} E(\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1}) - \sum_{k=1}^{k_n} E^2(\xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\varepsilon\}} | \mathscr{F}_{n,k-1})$$

$$\xrightarrow{P} \sigma^2, \quad \varepsilon > 0,$$

即(4.2.33)成立. 据定理 4.2.9,在 Lindeberg 条件和(4.2.34)之下,定理结论成立. 据引理 4.2.6,(4.2.35)等价于(4.2.6),而据引理 4.2.8,在(4.2.6)之下,(4.2.7)亦等价于(4.2.36). 故在 Lindeberg 条件和(4.2.7)之下,定理结论仍成立. 证完.

## 习 题 4.2

1. 证明:如 r.v. $\xi$ 和 r.v. $\sigma$ 相互独立,$\xi \sim \Phi$,则 r.v. $\sigma\xi$ 的c.f. 是 $E\exp(-\sigma^2 t^2/2)$.

2. 对适 r. v. 阵列$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$，记

$$\sigma_n^2=\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2,\quad n\geqslant 1;$$

$$\eta_n^2=\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}^2|\mathscr{F}_{n,k-1}),\quad n\geqslant 1.$$

考虑下列命题：

(1) 对每 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}P(|\xi_{n,k}|\geqslant\varepsilon)=0;$$

(2) 对每 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|\geqslant\varepsilon)=0;$$

(3) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|\xrightarrow{P}0$;

(4) 对每 $\varepsilon>0$，

$$\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}^2I_{\{|\xi_{n,k}|\geqslant\varepsilon\}}\xrightarrow{P}0;$$

(5) 对每 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{n,k}^2I_{\{|\xi_{n,k}|\geqslant\varepsilon\}}=0;$$

(6) 对每 $\varepsilon>0$，

$$\sum_{k=1}^{k_n}E[\xi_{n,k}^2I_{\{|\xi_{n,k}|\geqslant\varepsilon\}}|\mathscr{F}_{n,k-1}]\xrightarrow{P}0.$$

证明下列结论：

A. 各命题间有下列关系

$$(2)\Rightarrow(1)\Leftarrow(3)\Leftrightarrow(4)\Leftarrow(5)\Rightarrow(6);$$

B. 如果$\{\sigma_n^2,n\geqslant 1\}$一致可积，则(4)$\Leftrightarrow$(5)；

C. 如果$\{\eta_n^2,n\geqslant 1\}$一致可积，则(5)$\Leftrightarrow$(6)；

D. 如果对每 $n\geqslant 1$，$\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n\}$独立，则(2)$\Leftrightarrow$(3).

3. 设$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是适 r. v. 阵列. 证明:如果$E\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|\xi_{n,k}|\to 0$,则 Lindeberg 条件成立. 特别地,如果$A_{n,k}\in\mathscr{F}_{n,k}$满足

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{k_n}A_{n,k}\right)\to 0,$$

则$\sum\limits_{k=1}^{k_n}P(A_{n,k}|\mathscr{F}_{n,k-1})\xrightarrow{P}0$.

4. 设$\xi,\xi_n\in L_1(\Omega,\mathscr{F},P)$. 证明

$$\xi_n\xrightarrow{L_1}\xi$$

当且仅当

$$E\xi_n I_A\to E\xi I_A$$

对$A\in\mathscr{F}$一致成立.

5. 设$\{\eta_n,n\geqslant 1\}$i. i. d. ,

$$P(\eta_n=-1)=P(\eta_n=1)=1/2.$$

令

$$\xi_{n,k}=\eta_k\left(\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i/i\right)/\sqrt{n},\quad k=1,\cdots,n;$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_{n,k}.$$

证明:对某 r. v. $\sigma^2\geqslant 0$,(4. 2. 9)对由(4. 2. 10)决定的$G$成立.

6. 概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的 r. v. 列$\{\eta_n,n\geqslant 1\}$称为是依概率相对紧的,如对$\{n\}$的任子列$\{n'\}$,存在$\{n'\}$的子列$\{n''\}$和$\{\Omega,\mathscr{F},P\}$上的 r. v. $\eta$使

$$\eta_{n''}\xrightarrow{P}\eta.$$

证明:如果鞅差阵列$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1\}$满足 Lindeberg 条件,则(4. 2. 9)对由(4. 2. 10)确定之$G$成立并且

$$\left\{\sum_{k=1}^{k_n} E(\xi_{n,k}^2 | \mathscr{F}_{n,k-1}), n \geqslant 1\right\}$$

依概率相对紧当且仅当(4.2.34)成立.

7. 设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$是独立 r.v. 列,对每 $k\geqslant 1, E\xi_k=0, E\xi_k^2=\sigma_k^2>0$.记

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ \Sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, \quad n \geqslant 1.$$

证明:如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Sigma_n^2} \sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2 I_{\{|\xi_k| \geqslant \varepsilon \Sigma_n\}} = 0$$

对每 $\varepsilon>0$ 成立,则

$$S_n/\Sigma_n \xrightarrow{\text{m. d.}} \Phi.$$

8. 设$\{\xi_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant k_n, n\geqslant 1\}$满足:对每 $n\geqslant 1, \xi_{n,1}, \cdots, \xi_{n,k_n}$独立及 $k_n\to\infty$. 证明:如

$$\sum_{k=1}^{k_n} P(|\xi_{n,k}| \geqslant \varepsilon) \to 0$$

对任给 $\varepsilon>0$ 成立,又存在 $\tau>0$ 使

$$\sum_{k=1}^{k_n} E\xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}| \leqslant \tau\}} \to 0$$

和

$$\sum_{k=1}^{k_n} \operatorname{var} \xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}| \leqslant \tau\}} \to 0$$

成立,则

$$\sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k} \xrightarrow{P} 0.$$

## 第三节　独立随机变量阵列的中心极限定理和弱大数律

### 3.1 Lindeberg-Feller 定理

关于独立 r.v. 阵列的弱收敛已有相当完整之结论，这里我们只讨论阵列行和向正态分布和退化分布的收敛，也就是中心极限定理和弱大数律. 对于向正态分布的收敛，我们选择了两个内容，一个是 L-F(Lindeberg-Feller 的缩写)定理，一个是独立和的分布向正态分布收敛的速度的估计——Berry-Esseen 定理. 利用第二节的结果，这里的定理 4.3.4 在形式上比原始的 L-F 定理要强些.

**引理 4.3.1**　设 r.v. $\xi$ 对应的 d.f. 和 c.f. 分别是 $F$ 和 $f$，$E\xi=0$，$E\xi^2=\sigma^2>0$. 则

$$(4.3.1)\qquad p(x)=\begin{cases}2\int_x^{\infty}[1-F(u)]\mathrm{d}u/\sigma^2, & x\geqslant 0,\\ 2\int_{-\infty}^{x}F(u)\mathrm{d}u/\sigma^2, & x<0\end{cases}$$

是一个分布密度；如以 $\varphi$ 记 $p$ 对应的 c.f.，则

$$(4.3.2)\qquad f(t)=1-\sigma^2t^2\varphi(t)/2,\quad t\in R.$$

**证明**　易见 $p\geqslant 0$. 又由

$$\int_0^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=\int_{(0,\infty)}u^2\mathrm{d}F(u)/\sigma^2,$$

$$\int_{-\infty}^{0}p(x)\mathrm{d}x=\int_{(-\infty,0]}u^2\mathrm{d}F(u)/\sigma^2$$

推知 $\int_R p(x)\mathrm{d}x=1$. 故 $p$ 是分布密度. 由(4.3.1)和 Fubini 定理易得

$$\int_0^\infty e^{itx}p(x)dx = 2\int_0^\infty e^{itx}dx\int_x^\infty du\int_{(u,\infty)} dF(v)/\sigma^2$$

$$= -2\int_{(0,\infty)} (e^{itv} - 1 - itv)dF(v)/(t\sigma)^2;$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{itx}p(x)dx = 2\int_{-\infty}^x e^{itx}dx\int_{-\infty}^x du\int_{(-\infty,u]} dF(v)/\sigma^2$$

$$= -2\int_{(-\infty,0]} (e^{itv} - 1 - itv)dF(v)/(t\sigma)^2.$$

把以上两式相加并注意 $E\xi=0$ 即得

$$\varphi(t) = \int_R e^{itx}p(x)dx = -2[f(t) - 1]/(t\sigma)^2$$

(以上各式右端 $t=0$ 处的值理解为 $t\to 0$ 时的极限). 故(4.3.2)成立. 证完.

**引理 4.3.2** 设$\{f_n, n\geqslant 1\}$是 c. f. 列, 则对每 $t\in \boldsymbol{R}$, $f_n(t)\to 1$ 当且仅当 $\mathrm{Re}f_n(t)\to 1$, 这里 Re 记一个复数的实部.

**证明** 引理结论中"当"的部分是显然成立的, 故只需证"仅当"部分. 对任意固定的 $t\in R$, 表 $f_n(t)=\alpha_n+i\beta_n, n\geqslant 1$. 为证"仅当"部分只需证 $\alpha_n\to 1$ 蕴含 $\beta_n\to 0$. 用反证法, 如 $\alpha_n\to 1$ 且存在 $\beta\neq 0$ 使

$$\beta_{n_k}^2 \geqslant \beta^2 > 0$$

对一列$\{n_k, k\geqslant 1\}$成立, 那就必然有

$$\liminf_{k\to\infty} |f_{n_k}(t)|^2 \geqslant 1 + \beta^2 > 1.$$

但是, 对每 $n\geqslant 1$ 均有$|f_n(t)|^2\leqslant 1$, 所以这是不可能的. 证完.

**引理 4.3.3** 如复数阵列$\{\alpha_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant k_n, n\geqslant 1\}$满足条件

$$\alpha_n := \max_{1\leqslant k\leqslant k_n} |\alpha_{n,k}| \to 0, \quad n\to\infty \tag{4.3.3}$$

并且存在 $A>0$ 使

$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n} |\alpha_{n,k}| \leqslant A, \tag{4.3.4}$$

则必有

$$(4.3.5)\qquad \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=1}^{k_n}\alpha_{n,k}+\sum_{k=1}^{k_n}\log(1-\alpha_{n,k})\Big]=0,$$

这里,对复数 $z=|z|e^{i\theta}$,定义

$$\log z:=\log|z|+i\theta,\qquad -\pi<\theta\leqslant\pi.$$

**证明** 在区域 $|z|<1,-\pi<\arg(1-z)<\pi$ 展开

$$\log(1-z)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j z^j/j.$$

由(4.3.3)知当 $n$ 充分大以后有

$$\sum_{k=1}^{k_n}\log(1-\alpha_{n,k})=-\sum_{k=1}^{k_n}\alpha_{n,k}+\rho_n,$$

其中 $\rho_n=\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\alpha_{n,k}^j/j$. 但由(4.3.4)又知

$$|\rho_n|\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_{n,k}|^j/j\leqslant A\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_n^j=A\alpha_n/(1-\alpha_n)\to 0,$$

故(4.3.5)成立. 证完.

下面我们给出独立 r. v. 阵列形式的 L-F 定理. 定理的充分性是 Lindeberg 证明的,必要性则属于 Feller.

**定理 4.3.4** 设 $\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 是一个独立 r. v. 阵列,也就是说,对每 $n\geqslant 1$, $\xi_{n,1},\cdots,\xi_{n,k_n}$ 是相互独立的. 如果对每 $n\geqslant 1$,每 $k=1,\cdots,k_n$, $E\xi_{n,k}=0$, $E\xi_{n,k}^2=\sigma_{n,k}^2<\infty$,并且 $\sigma_n^2=:\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{n,k}^2>0$,则下列两式

$$(4.3.6)\qquad \lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\sigma_{n,k}^2/\sigma_n^2=0,$$

$$(4.3.7)\qquad \sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}/\sigma_n\xrightarrow{d}\Phi$$

成立之必要充分条件是

(4.3.8) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|\geqslant\varepsilon\sigma_n\}}=0,\quad \varepsilon>0.$$

**证明** 对任给 $\varepsilon>0$,易见

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}\sigma_{n,k}^2/\sigma_n^2\leqslant\varepsilon^2+\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|\geqslant\varepsilon\sigma_n\}}.$$

因此,(4.3.8)蕴含(4.3.6).故为证定理,只需证明在(4.3.6)之下,(4.3.7)与(4.3.8)等价.

对每 $n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant k_n$,以 $f_{n,k}$记 $\xi_{n,k}$的 c.f.,则由引理 4.3.1 可表

$$f_{n,k}(t)=1-\sigma_{n,k}^2t^2\varphi_{n,k}(t)/2,\quad t\in\boldsymbol{R},$$

而 $\varphi_{n,k}$也是 c.f..对每 $n\geqslant1$,再以 $f_n$ 记 $\sum\limits_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}/\sigma_n$ 的 c.f.,则 $f_n(t)=\prod\limits_{k=1}^{k_n}f_{n,k}(t/\sigma_n)$,因而

$$\log f_n(t)=\sum_{k=1}^{k_n}\log[1-\sigma_{n,k}^2t^2\varphi_{n,k}(t/\sigma_n)/(2\sigma_n^2)]+2j_n(t)\pi\mathrm{i}$$

对每 $t\in\boldsymbol{R}$ 成立,这里 $j_n(t)$是一个整数.如果对每 $n\geqslant1,1\leqslant k\leqslant k_n$,记

$$\alpha_{n,k}=\sigma_{n,k}^2t^2\varphi_{n,k}(t/\sigma_n)/(2\sigma_n^2),$$

则取 $A=t^2/2$,(4.3.4)成立.此外,(4.3.6)又说明这样确定的$\{\alpha_{n,k}\}$还满足(4.3.3).因此,由引理 4.3.3 又推知

$$\log f_n(t)=-t^2\varphi_n(t)/2+2j_n(t)\pi\mathrm{i}+o(1),$$

其中的

$$\varphi_n(t)=:\sum_{k=1}^{k_n}\sigma_{n,k}^2\varphi_{n,k}(t/\sigma_n)/\sigma_n^2$$

作为若干 c.f. 的加权平均,还是一个 c.f..由此可见,如果

(4.3.9) $$\varphi_n(t)\to1,\quad t\in\boldsymbol{R}$$

成立,则

(4.3.10) $$f_n(t)=\exp[-t^2\varphi_n(t)/2+o(1)]\to e^{-t^2/2}.$$

反之，如果(4.3.10)成立，则

$$-t^2\mathrm{Re}\varphi_n(t)/2+o(1)=\mathrm{Re}\log f_n(t)=\log|f_n(t)|\to-t^2/2,$$

并进而推知 $\mathrm{Re}\varphi_n(t)\to 1$. 据引理 4.3.2，这又得到(4.3.9). 于是(4.3.9)与(4.3.10)等价，从而亦与(4.3.7)等价. 因此，为了证明(4.3.7)与(4.3.8)等价，只需证(4.3.9)与(4.3.8)等价.

对每 $n\geqslant 1, 1\leqslant k\leqslant k_n$，以 $F_{n,k}$ 记 $\xi_{n,k}$ 的 d.f.，则由引理 4.3.1 知 $\varphi_{n,k}$ 对应的分布密度是

$$p_{n,k}(x)=\begin{cases}2\int_x^\infty[1-F_{n,k}(u)]\mathrm{d}u/\sigma_{n,k}^2, & x\geqslant 0,\\ 2\int_{-\infty}^x F_{n,k}(u)\mathrm{d}u/\sigma_{n,k}^2, & x<0.\end{cases}$$

于是，进一步可求出 $\varphi_n$ 对应的分布密度

$$p_n(x)=\begin{cases}2\sum_{k=1}^{k_n}\int_{\sigma_n x}^\infty[1-F_{n,k}(u)]\mathrm{d}u/\sigma_n^2, & x\geqslant 0,\\ 2\sum_{k=1}^{k_n}\int_{-\infty}^{\sigma_n x}F_{n,k}(u)\mathrm{d}u/\sigma_n^2, & x<0.\end{cases}$$

由此，利用 Fubini 定理不难算出：对任给 $\varepsilon>0$，

$$\int_\varepsilon^\infty p_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}-\varepsilon\sigma_n)^2 I_{\{\xi_{n,k}>\varepsilon\sigma_n\}};$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} p_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E(\xi_{n,k}+\varepsilon\sigma_n)^2 I_{\{\xi_{n,k}<-\varepsilon\sigma_n\}}.$$

这样，我们就推知(4.3.9)等价于

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|x|\geqslant\varepsilon}p_n(x)\mathrm{d}x=0,\quad \varepsilon>0,$$

等价于

(4.3.11) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E(|\xi_{n,k}|-\varepsilon\sigma_n)^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\sigma_n\varepsilon\}}=0,\quad \varepsilon>0.$$

但是，对每 $n\geqslant 1$，当 $|\xi_{n,k}|>\sigma_n\varepsilon$ 时 $|\xi_{n,k}|-\sigma_n\varepsilon/2>|\xi_{n,k}|/2(k=1,\cdots,k_n)$，故我们有

$$\frac{1}{4\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\sigma_n\varepsilon\}}\leqslant\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E(|\xi_{n,k}|-\sigma_n\varepsilon/2)^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\sigma_n\varepsilon/2\}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{n,k}^2 I_{\{|\xi_{n,k}|>\sigma_n\varepsilon\}}.$$

这又说明了(4.3.11)等价于(4.3.10). 定理证完.

通常，条件(4.3.8)称为 Lindeberg 条件. 以上，我们给出了 L-F定理的一个直接的证明，下面我们将借助第二节的结果，针对独立 r.v. 序列的情况来加强 L-F 定理的结论.

**定理 4.3.5** 设独立 r.v. 序列 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 符合条件 $E\xi_n=0$，$E\xi_n^2=\sigma_n^2<\infty$ 以及 $\sigma_1^2>0$，记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\Sigma_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad n\geqslant 1.$$

则下列三种说法等价：

(1) 等式

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sigma_k^2/\Sigma_n^2=0 \tag{4.3.12}$$

成立并且

$$S_n/\Sigma_n\xrightarrow{\text{m.d.}}\Phi; \tag{4.3.13}$$

(2) 等式(4.3.12)成立并且

$$S_n/\Sigma_n\xrightarrow{d}\Phi; \tag{4.3.14}$$

(3) Lindeberg 条件满足，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k^2 I_{\{|\xi_k|\geqslant\varepsilon\Sigma_n\}}=0. \tag{4.3.15}$$

**证明** 易见(1)蕴含(2). 对每 $n\geqslant 1,1\leqslant k\leqslant n$，令

$$\xi_{n,k}=\xi_k/\Sigma_n.$$

对 $\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1\}$ 用定理 3.3.4 又知(2)蕴含(3). 再对每 $n\geqslant$

$1, 1\leqslant k\leqslant n$，令

$$\mathscr{F}_{n,k}=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_k).$$

对鞅差阵列$\{\xi_{n,k},\mathscr{F}_{n,k},1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1\}$用定理 4.2.10，即知(3)又蕴含(1). 证完.

这个定理说明一个有趣的事实：对于独立 r.v. 序列而言，在(4.3.12)之下，$S_n/\Sigma_n$ 对 $\Phi$ 的依分布收敛和混合收敛是等价的.

作为定理 4.3.5 的推论，容易得到

**系 4.3.6** 如$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是i.i.d.的r.v.序列，$E\xi_1=0$，$E\xi_1^2=\sigma^2\in(0,\infty)$，则

$$S_n/(\sigma\sqrt{n})\xrightarrow{\text{m.d.}}\Phi.$$

**系4.3.7** 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立r.v.序列，对每$n\geqslant 1$，$E\xi_n=0$，又存在 $\delta>0$ 使 $E|\xi_n|^{2+\delta}<\infty$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k|^{2+\delta}/\Sigma_n^{2-\delta}=0,$$

则

$$S_n/\Sigma_n\xrightarrow{\text{m.d.}}\Phi.$$

### 3.2 Berry-Esseen 定理

从系 4.3.7 可以看出，对于满足一定矩条件的独立 r.v. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$，其部分和序列$\{S_n,n\geqslant 1\}$服从中心极限定理，即

$$S_n/\Sigma_n\xrightarrow{d}\Phi.$$

(如前，$\Sigma_n^2$ 记部分和的方差). 以 $F_n$ 记 $S_n/\Sigma_n$ 的 d.f.，由习题 4.1 之 3 可知这时亦有

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|F_n(x)-\Phi(x)|\to 0,\quad n\to\infty.$$

由此便引起了一个深一层的问题：$\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|F_n(x)-\Phi(x)|$以多快的速度趋于 0. 下面我们就来解决这个问题.

对每 $T>0$,令

$$v_T(x) = (1 - \cos Tx)/(\pi T x^2), \quad x \in \boldsymbol{R}$$

(定义 $v_T(0)=\lim\limits_{x\to 0} v_T(x)=T/(2\pi)$),不难见 $v_T$ 作为 $x$ 的函数是一个分布密度,而且它对应的 c. f. 是

$$a_T(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & |t| \leqslant T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$

**引理 4.3.8** 设 $F$ 是一 d. f.,又 $\boldsymbol{R}$ 上的函数 $G$ 有有界导函数 $G'$ 且满足

(4.3.16) $$G(-\infty) := \lim_{x\to -\infty} G(x) = 0;$$

$$G(\infty) := \lim_{x\to\infty} G(x) = 1.$$

记 $M=\sup\limits_{x\in \boldsymbol{R}}|G'(x)|$, 又对每 $x\in \boldsymbol{R}$,

(4.3.17) $$\Delta(x) = F(x) - G(x);$$

$$\delta_T(x) = \int_R \Delta(x-y) v_T(y) \mathrm{d}y.$$

则对每 $T>0$,

(4.3.18) $$\sup_{x\in \boldsymbol{R}}|\Delta(x)| \leqslant 2\sup_{x\in \boldsymbol{R}}|\delta_T(x)| + 24M/(\pi T).$$

**证明** 为方便起见,记 $\varepsilon=\sup\limits_{x\in \boldsymbol{R}}|\Delta(x)|$. 由于 $G$ 处处连续而且(4.3.16)成立,故 $\sup\limits_{x\in \boldsymbol{R}}|G(x)|<\infty$ 从而

$$\varepsilon \leqslant 1 + \sup_{x\in \boldsymbol{R}}|G(x)| < \infty.$$

我们首先证明:存在 $x_0\in \boldsymbol{R}$ 使 $|\Delta(x_0)|=\varepsilon$ 或 $|\Delta(x_0-0)|=\varepsilon$ 成立. 如 $\varepsilon=0$,结论显然成立,故无妨设 $\varepsilon>0$. 由于 $\Delta(\pm\infty):=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\Delta(x)=0$,故可取 $\hat{x}>0$,使当 $|x|>\hat{x}$ 时 $|\Delta(x)|<\varepsilon/2$ 从而

$$\varepsilon = \sup_{|x|\leqslant \hat{x}}|\Delta(x)|.$$

由此,我们可取 $\{x_n, n\geqslant 1\}\subset[-\hat{x}, \hat{x}]$ 使 $|\Delta(x_n)|\to\varepsilon$. 设 $x_0\in[-\hat{x}, \hat{x}]$ 是 $\{x_n, n\geqslant 1\}$ 的极限点,则当 $\#\{x_n: x_n\geqslant x_0\}=\infty$ 时, $|\Delta(x_0)|=\varepsilon$; 当 $\#\{x_n: x_n<x_0\}=\infty$ 时, $|\Delta(x_0-0)|=\varepsilon$. 可见我们所要的结论

成立.

其次我们证明当 $\Delta(x_0)=-\varepsilon$(或 $\Delta(x_0-0)=-\varepsilon$)时, (4.3.18)成立. 这时,我们表

$$\delta_T(x_0-\varepsilon/(2M))=I_1+I_2,$$

其中

$$I_1=\int_{|x|>\varepsilon/(2M)}\Delta(x_0-\varepsilon/(2M)-x)v_T(x)\mathrm{d}x;$$

$$I_2=\int_{|x|\leqslant\varepsilon/(2M)}\Delta(x_0-\varepsilon/(2M)-x)v_T(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\Delta(x_0-\varepsilon/(2M)-x)\leqslant\varepsilon$ 对每 $|x|>\varepsilon/(2M)$ 成立,故

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\varepsilon\int_{|x|>\varepsilon/(2M)}v_T(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{2\varepsilon}{\pi T}\int_{|x|>\varepsilon/(2M)}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=8M/(\pi T).\end{aligned}$$

此外,在下列不等式

$$\begin{aligned}&\Delta(x_0-s)+\varepsilon\\&=F(x_0-s)-F(x_0)(\text{或 }F(x_0-0))-G(x_0-s)+G(x_0)\\&\leqslant G(x_0)-G(x_0-s)\\&=G'(x_0-\theta s)s\quad(|\theta|\leqslant 1)\\&\leqslant Ms,\quad s\geqslant 0\end{aligned}$$

中取 $s=\varepsilon/(2M)+x$ 并注意 $\int_{|x|\leqslant\varepsilon/(2M)}xv_T(x)\mathrm{d}x=0$,又得

$$\begin{aligned}I_2&\leqslant\int_{|x|\leqslant\varepsilon/(2M)}\{M[\varepsilon/(2M)+x]-\varepsilon\}v_T(x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\varepsilon}{2}\int_{|x|\leqslant\varepsilon/(2M)}v_T(x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\varepsilon}{2}\left[1-\int_{|x|>\varepsilon/(2M)}v_T(x)\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant-\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{8M}{\pi T\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

因此，当 $\Delta(x_0)=-\varepsilon$ 或 $\Delta(x_0-0)=-\varepsilon$ 时，

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|\delta_T(x)|\geqslant-\delta_T(x_0-\varepsilon/(2M))$$

$$\geqslant-(I_1+I_2)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}-\frac{12M}{\pi T},$$

即(4.3.18)成立.

最后我们指出，用完全类似的方法可以证明当 $\Delta(x_0)=\varepsilon$ 或 $\Delta(x_0-0)=\varepsilon$ 时，(4.3.18)仍然成立. 这样，就结束了引理的证明.

**引理 4.3.9** 设 $F$ 和 $G$ 是 d.f.，$f$ 和 $g$ 分别是对应的 c.f.. 如果 $G$ 有有界导函数 $G'$，记 $M=\sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}}|G'(x)|$，则对每 $T>0$，

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|F(x)-G(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|\mathrm{d}t+\frac{24M}{\pi T}. \tag{4.3.19}$$

**证明** 记 $\Delta,\delta_T$ 如(4.3.17). 根据引理 4.3.8，为证(4.3.19)，只需证

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|\delta_T(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|\mathrm{d}t. \tag{4.3.20}$$

以 $V_T$ 记 $v_T$ 的 d.f.，则 d.f. $F$ 与 d.f. $V_T$ 的卷积

$$(F*V_T)(x)=\int_{\boldsymbol{R}}F(x-y)v_T(y)\mathrm{d}y,\quad x\in\boldsymbol{R},$$

其对应的 c.f. 为

$$f(t)\alpha_T(t)=\begin{cases}0, & |t|>T,\\ f(t)(1-|t|/T), & |t|\leqslant T.\end{cases}$$

由此不难见 $|f(\cdot)\alpha_T(\cdot)|$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上对 Lebesgue 测度是可积的. 因此 $F*V_T$ 绝对连续且可表为

$$(F*V_T)(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}f(u)(T-|u|)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t.$$

同理 $G*V_T$ 亦绝对连续且可表为

$$(G*V_T)(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}g(u)(T-|u|)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t.$$

这样,我们就有

$$\begin{aligned}
\delta_T(x) &= \int_{\boldsymbol{R}}[F(x-y)-G(x-y)]v_T(y)\mathrm{d}y \\
&= (F*V_T)(x)-(G*V_T)(x) \\
&= \int_{-\infty}^{x}\left\{\frac{1}{2\pi T}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-itu}[f(u)-g(u)](T-|u|)\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi T}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{x}\mathrm{d}t\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-itu}[f(u)-g(u)](T-|u|)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi T}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-T}^{T}[f(u)-g(u)](T-|u|)\frac{\mathrm{e}^{-iux}-\mathrm{e}^{iu\lambda}}{-iu}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

如果 $\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|\mathrm{d}t=\infty$,(4.3.20) 是显然成立的,故无妨设 $\int_{-T}^{T}\left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right|\mathrm{d}t<\infty$. 这时,由 Lebesgue 定理知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-T}^{T}[f(u)-g(u)][T-|u|]\frac{\mathrm{e}^{iu\lambda}}{u}\mathrm{d}u=0,$$

从而

$$\delta_T(x)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi T}\int_{-T}^{T}\frac{f(u)-g(u)}{u}(T-|u|)\mathrm{e}^{-iux}\mathrm{d}u,\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

由此可见(4.3.20)成立. 证完.

下列关于独立和 d. f. 向标准正态 d. f. 收敛速度的定理就称为 Berry-Esseen 定理.

**定理 4.3.10** 设 $n$ 是任一固定正整数, r. v. $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 相互独立,对 $k=1,\cdots,n$, $E\xi_k=0$, $E|\xi_k|^3<\infty$. 记

$$\sigma_n^2=\sum_{k=1}^{n}E\xi_k^2;\quad \gamma_n^3=\sum_{k=1}^{n}E|\xi_k|^3;$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k;\qquad F_n(x)=P(S_n\leqslant\sigma_n x),\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

则

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant 6(\gamma_n/\sigma_n)^3. \tag{4.3.21}$$

**证明** 由于当 $6(\gamma_n/\sigma_n)^3\geqslant 1$ 时，(4.3.21)显然成立，故无妨设

$$6(\gamma_n/\sigma_n)^3<1. \tag{4.3.22}$$

对每 $k=1,\cdots,n$，记 $\sigma_{n,k}^2=E\xi_k^2,\gamma_{n,k}^3=E|\xi_k|^3$ 及

$$\beta_k(t)=\exp\left[\left(-\frac{\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}+\frac{\gamma_{n,k}^3}{3\gamma_n^3}\right)t^2\right],\quad t\in\boldsymbol{R}.$$

当 $k$ 使得 $2\sigma_n^2\sigma_{n,k}>3\gamma_n^3$ 成立时，由矩不等式知 $\dfrac{\gamma_{n,k}^3}{3\gamma_n^3}\geqslant\dfrac{\sigma_{n,k}^3}{3\gamma_n^3}>\dfrac{\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}$，因而

$$\beta_k(t)\geqslant 1,\quad t\in\boldsymbol{R}. \tag{4.3.23}$$

当 $k$ 使得 $2\sigma_n^2\sigma_{n,k}\leqslant 3\gamma_n^3$ 成立时，由(4.3.22)推知 $\dfrac{\sigma_{n,k}}{\sigma_n}\leqslant\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\gamma_n}{\sigma_n}\right)^3<\dfrac{1}{4}$，因而

$$\beta_k(t)\geqslant\exp\left(-\frac{\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}t^2\right)\geqslant\exp\left(-\frac{t^2}{32}\right).$$

此式与(4.3.23)一起说明

$$\beta_k(t)\geqslant\exp\left(-\frac{t^2}{32}\right),\quad t\in\boldsymbol{R},k=1,\cdots,n. \tag{4.3.24}$$

对每 $k=1,\cdots,n$，以 $\varphi_k$ 记 $\xi_k$ 的 c. f.，则可表

$$\varphi_k\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)=1-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}+\theta\frac{|t|^3\gamma_{n,k}^3}{6\sigma_n^3},\quad t\in\boldsymbol{R}, \tag{4.3.25}$$

其中 $|\theta|\leqslant 1$. 又记 $T=\dfrac{8}{9}\left(\dfrac{\sigma_n}{\gamma_n}\right)^3$. 易见当 $k$ 使 $2\sigma_n^2\sigma_{n,k}\leqslant 3\gamma_n^3$ 时，对任何 $t\in[-T,T]$ 均有

$$1-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\geqslant 1-\frac{T^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\geqslant 1-\frac{8}{9}\left(\frac{2\sigma_n^2\sigma_{n,k}}{3\gamma_n^3}\right)^2\geqslant\frac{1}{9}>0,$$

因而

$$\left|\varphi_k\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right|\leqslant 1-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}+\frac{t^2\gamma_{n,k}^3}{3\gamma_n^3}\leqslant\beta_k(t).$$

这与(4.3.23)一起便说明了

$$\left|\varphi_k\left(\frac{t}{\sigma_k}\right)\right|\leqslant\beta_k(t),\quad |t|\leqslant T,k=1,\cdots,n. \tag{4.3.26}$$

此外，由矩不等式推知

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_{n,k}^{4}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\gamma_{n,k}^{4}\leqslant\gamma_{n}^{4}.$$

再利用(4.3.25)，(4.3.22)和不等式 $e^{x}-1-x\leqslant x^{2}/2(x<0)$，又得

(4.3.27) $$\sum_{k=1}^{n}\left|\varphi_k\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)-\exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{|t|^3\gamma_{n,k}^3}{6\sigma_n^3}+\left|\exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\right)-\left(1-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\right)\right|\right]$$

$$\leqslant\frac{|t|^3}{6}\left(\frac{\gamma_n}{\sigma_n}\right)^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{|t|^3}{6}\left(\frac{\gamma_n}{\sigma_n}\right)^3+\frac{t^4}{8}\left(\frac{\gamma_n}{\sigma_n}\right)^4$$

$$\leqslant\frac{|t|^3}{6}\left(\frac{\gamma_n}{\sigma_n}\right)^3\left(1+\frac{3|t|}{4\sqrt[3]{6}}\right)$$

$$\leqslant\frac{4|t|^3}{27T}\left(1+\frac{5}{12}|t|\right),\quad |t|\leqslant T.$$

记 $S_n/\sigma_n$ 的 c.f. 为 $f_n$，则由(4.3.24)，(4.3.26)和(4.3.27)我们得：对任 $t\in[-T,T]$，

$$|f_n(t)-\exp(-t^2/2)|$$

$$=\left|\prod_{k=1}^{n}\varphi_k\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)-\prod_{k=1}^{n}\exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\right)\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\left[\prod_{j=1}^{k}\varphi_j\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right]\left[\prod_{j=k+1}^{n}\exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,j}^2}{2\sigma_n^2}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\left[\prod_{j=1}^{k-1}\varphi_j\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right]\left[\prod_{j=k}^{n}\exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,j}^2}{2\sigma_n^2}\right)\right]\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{k-1}\left|\varphi_j\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)\right|\right]\left[\prod_{j=k+1}^{n}\exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,j}^2}{2\sigma_n^2}\right)\right]$$

$$\times \left| \varphi_k\left(\frac{t}{\sigma_n}\right) - \exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\right) \right|$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \beta_k(t)\right] \sum_{k=1}^{n} \left| \varphi_k\left(\frac{t}{\sigma_k}\right) - \exp\left(-\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2\sigma_n^2}\right) \right| / \beta_k(t)$$

$$\leqslant \left[\exp\left(-\frac{13}{96}t^2\right)\right] \frac{4|t|^3}{27T}\left(1 + \frac{5}{12}|t|\right)$$

$$\leqslant \frac{4|t|^3}{27T}\left(1 + \frac{5}{12}|t|\right)\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right).$$

由此易求得

$$\int_{-T}^{T} \left| \frac{f_n(t) - \exp(-t^2/2)}{t} \right| \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{4}{27T}\int_{-T}^{T}\left(t^2 + \frac{5}{12}|t|^3\right)\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{8}{27T}\int_{0}^{\infty}\left(t^2 + \frac{5}{12}t^3\right)\exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{32}{27T}\left(\sqrt{2\pi} + \frac{10}{3}\right).$$

再注意

$$M = (2\pi)^{-1/2} \max_{x\in \mathbf{R}} \exp(-x^2/2) = (2\pi)^{-1/2} \leqslant 0.4,$$

利用引理 4.3.9 便最终得到

$$\sup_{x\in \mathbf{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{32}{27\pi T}\left(\sqrt{2\pi} + \frac{10}{3}\right) + \frac{9.6}{\pi T}$$

$$\leqslant \frac{5.26}{T} < 5.96(\gamma_n/\sigma_n)^3,$$

故(4.3.21)成立. 证完.

把上述定理用于 i. i. d. 的情况，就得到 Berry 最初关于正态逼近的结论.

**系 4.3.11** 设 $n$ 是任一固定正整数，r. v. $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 独立同分布. 如果 $E\xi_1 = 0, E\xi_1^2 = \sigma^2 > 0, E|\xi_1|^3 = \gamma^3$，以 $F_n$ 记 $\sum_{k=1}^{n}\xi_k/(\sigma\sqrt{n})$

的 d.f.，则

$$\sup_{x\in R}|F_n(x)-\Phi(x)|\leqslant 6(\gamma/\sigma)^3/\sqrt{n}.$$

### 3.3 独立 r.v. 阵列的弱大数律

在讨论弱大数律之前，我们先引进一些必要的术语和概念.

设 $\xi$ 是一个 r.v.，$\tilde{\xi}$ 是与 $\xi$ 独立同分布的 r.v.，则我们称 r.v. $\xi^s:=\xi-\tilde{\xi}$ 是 $\xi$ 的对称化 r.v.. 设 $\xi$ 定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上，也许 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上并不存在与 $\xi$ 独立同分布的 r.v. $\tilde{\xi}$，从而不存在它的对称化 r.v. $\xi^s$. 但是，我们可以考虑"扩大"了的概率空间 $(\Omega\times\Omega,\mathscr{F}\times\mathscr{F},P\times P)$ 的 r.v. $\hat{\xi}(\omega_1,\omega_2)=\xi(\omega_1)$ 和 $\tilde{\xi}(\omega_1,\omega_2)=\xi(\omega_2)(\omega_1,\omega_2\in\Omega)$. 在这个"扩大"了的概率空间上，$\hat{\xi}$ 和 $\tilde{\xi}$ 独立而且它们都与 $\xi$ 同分布，从而 $\xi^s=\hat{\xi}-\tilde{\xi}$ 是 $\hat{\xi}$ 的对称化 r.v.. 正是在这样的意义下，我们认为 r.v. $\xi$ 的对称化 r.v. 总是存在的. 换句话说，我们干脆就认为概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 足够"大"，能"容纳"下一个与 $\xi$ 独立同分布的 r.v. $\tilde{\xi}$ 及 $\xi$ 的对称化 r.v. $\xi^s$. 不仅如此，对于一个定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 r.v. 序列 $\{\xi_n,n\geqslant1\}$，我们也认为在同一概率空间上存在与它独立的 r.v. 序列 $\{\tilde{\xi}_n,n\geqslant1\}$ 及它的对称化 r.v. 序列 $\{\xi_n^s:=\xi_n-\tilde{\xi}_n,n\geqslant1\}$.

对于概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 r.v. $\xi$，我们将把符合条件

$$P(\xi\geqslant m)\geqslant 1/2,\quad P(\xi\leqslant m)\geqslant 1/2$$

的任何实数 $m$ 称为 $\xi$ 的中位数. 有时候为了标明 r.v. $\xi$ 的中位数而使用记号 $m(\xi)$. 易见，任一 r.v. $\xi$ 的中位数存在但未必唯一；又易见对任何实数 $C$，下列关系成立

$$m(C\xi)=Cm(\xi);\quad m(C+\xi)=C+m(\xi).$$

此外，关于中位数还有

**引理 4.3.12** 设 $m$ 是 r.v. $\xi$ 的一个中位数，则对任给 $\varepsilon>0, b \in \boldsymbol{R}$，

$$P(|\xi-m| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2P(|\xi^s| \geqslant \varepsilon) \leqslant 4P(|\xi-b| \geqslant \varepsilon/2). \tag{4.3.28}$$

**证明** 以 $\tilde{\xi}$ 记与 $\xi$ 独立同分布之 r.v.，则

$$P(\xi^s \geqslant \varepsilon) \geqslant P(\xi-m \geqslant \varepsilon, \tilde{\xi}-m \leqslant 0)$$
$$= P(\xi-m \geqslant \varepsilon)P(\tilde{\xi} \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}P(\xi-m \geqslant \varepsilon).$$

同理可证

$$P(\xi^s \leqslant -\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}P(\xi-m \leqslant -\varepsilon).$$

把以上两式相加即得(4.3.28)之前一式. 又

$$P(|\xi^s| \geqslant \varepsilon) = P(|(\xi-b)-(\tilde{\xi}-b)| \geqslant \varepsilon)$$
$$\leqslant P(|\xi-b| \geqslant \varepsilon/2) + P(|\tilde{\xi}-b| \geqslant \varepsilon/2)$$
$$= 2P(|\xi-b| \geqslant \varepsilon/2),$$

故(4.3.28)之后一式亦成立. 证完.

在讨论独立 r.v. 阵列行和的弱大数律之前，我们还需要一个关于 c.f. 的引理.

**引理 4.3.13** 设 r.v. $\xi$ 的 c.f. 是 $f$. 如当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$0 < \operatorname{Re} f(t) \leqslant 1$，则对任给 $\varepsilon \in (0,1)$ 存在 $K>0$ 使

$$P(|\xi| \geqslant \varepsilon) \leqslant -K\int_0^1 \log \operatorname{Re} f(t)\,dt; \tag{4.3.29}$$

$$E\xi^2 I_{(|\xi| \leqslant \varepsilon)} \leqslant -K \log \operatorname{Re} f(1). \tag{4.3.30}$$

**证明** 以 $F$ 记 r.v. $\xi$ 的 d.f.. 注意当定义 $\sin x/x|_{x=0}=1$ 时，$\sin x/x$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的有界连续函数并且对任给 $\varepsilon \in (0,1)$，存在 $K>0$ 使 $1-\sin x/x \geqslant 1/K$ 对一切 $|x| \geqslant \varepsilon$ 成立，又注意当 $0<x \leqslant 1$ 时，$-\log x \geqslant 1-x$，我们得

$$-K\int_0^1 \log \mathrm{Re} f(t)\mathrm{d}t \geqslant K\int_0^1 [1-\mathrm{Re} f(t)]\mathrm{d}t$$
$$= K\int_0^1 \mathrm{d}t\int_R (1-\cos tx)\mathrm{d}F(x)$$
$$= K\int_R (1-\sin x/x)\mathrm{d}F(x) \geqslant P(|\xi| \geqslant \varepsilon).$$

这证明了(4.3.29). 注意当定义$(1-\cos x)/x^2|_{x=0}=1/2$时,$(1-\cos x)/x^2$是有界连续函数并且对任给$\varepsilon\in(0,1)$,存在$K>0$使当$|x|\leqslant\varepsilon$时,$(1-\cos x)/x^2\geqslant 1/K$,又有

$$-K\log \mathrm{Re} f(1) \geqslant K[1-\mathrm{Re} f(1)] = K\int_R (1-\cos x)\mathrm{d}F(x)$$
$$\geqslant \int_{|x|\leqslant\varepsilon} x^2\mathrm{d}F(x) = E\xi^2 I_{\{|\xi|\leqslant\varepsilon\}}.$$

这又证明了(4.3.30). 证完.

**定理 4.3.14** 设$\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是独立 r.v. 阵列,$k_n\to\infty$. 则

(4.3.31) $$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n} P(|\xi_{n,k}| \geqslant \varepsilon) \to 0$$

对任给$\varepsilon>0$并且

(4.3.32) $$S_n =: \sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k} \xrightarrow{P} 0$$

当且仅当

(4.3.33) $$\sum_{k=1}^{k_n} P(|\xi_{n,k}| \geqslant \varepsilon) \to 0$$

对任给$\varepsilon>0$成立并且下列两式对任给$\tau>0$或对某$\tau>0$成立:

(4.3.34) $$\sum_{k=1}^{k_n} E\xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}} \to 0;$$

(4.3.35) $$\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{var}\,\xi_{n,k} I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}} \to 0.$$

**证明** 定理"当"的部分是定理 4.2.9 的推论(习题 4.2 之

8)，故只需证“仅当”部分.

以 $m_{n,k}$ 记 $\xi_{n,k}$ 的中位数，由(4.3.31)易得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|m_{n,k}|\to 0$$

(参见习题 4.3 之 14). 因此为证(4.3.33)，只需证

$$(4.3.36)\qquad \sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}-m_{n,k}|\geqslant\varepsilon)\to 0,\quad \varepsilon>0.$$

以 $\xi^s_{n,k}$ 记 $\xi_{n,k}$ 的对称化 r.v.，则 $S^s_n=\sum_{k=1}^{k_n}\xi^s_{n,k}$ 是 $S_n$ 的对称化 r.v.. 利用(4.3.28)式，由(4.3.32)可推知

$$S^s_n\xrightarrow{P}0.$$

但是，$\xi^s_{n,1},\cdots,\xi^s_{n,k_n}$ 相互独立而且对每 $k=1,\cdots,k_n$，如以 $f_{n,k}$ 记 $\xi_{n,k}$ 的 c.f.，则 $\xi^s_{n,k}$ 的 c.f. 是 $|f_{n,k}|^2$. 因此又有

$$(4.3.37)\qquad \prod_{k=1}^{k_n}|f_{n,k}|^2(t)=E\exp(\mathrm{i}tS^s_n)\to 1$$

在任意有限区间对 $t$ 一致成立(习题 4.1,4). 取 $n_0$ 充分大使当 $n\geqslant n_0$ 时，对一切 $0<t\leqslant 1$ 均有

$$1/2\leqslant\prod_{k=1}^{k_n}|f_{n,k}|^2(t)\leqslant 1$$

以及对每 $k=1,\cdots,k_n$，

$$0<|f_{n,k}|^2(t)\leqslant 1.$$

于是，由(4.3.28)，(4.3.29)和有界控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}-m_{n,k}|\geqslant\varepsilon)&\leqslant 2\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi^s_{n,k}|\geqslant\varepsilon)\\&\leqslant -2K\sum_{k=1}^{k_n}\int_0^1\log|f_{n,k}|^2(t)\mathrm{d}t\\&=-2K\int_0^1\log\Big[\prod_{k=1}^{k_n}|f_{n,k}|^2(t)\Big]\mathrm{d}t\to 0.\end{aligned}$$

这证明了(4.3.36)从而也证明了(4.3.33).

对任意的 r.v. $\xi$ 和任给的 $\varepsilon>0$,我们有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{var}\xi^s I_{\{|\xi^s|\leqslant\varepsilon\}} = E(\xi^s)^2 I_{\{|\xi^s|\leqslant\varepsilon\}} \\
\geqslant & E(\xi-\tilde{\xi})^2 I_{\{|\xi|\leqslant\varepsilon/2,|\tilde{\xi}|\leqslant\varepsilon/2\}} \\
= & 2P(|\xi|\leqslant\varepsilon/2)E\xi^2 I_{\{|\xi|\leqslant\varepsilon/2\}} - 2E^2\xi I_{\{|\xi|\leqslant\varepsilon/2\}} \\
= & 2P(|\xi|\leqslant\varepsilon/2)\operatorname{var}\xi I_{\{|\xi|\leqslant\varepsilon/2\}} - 2P(|\xi|>\varepsilon/2)E^2\xi I_{\{|\xi|\leqslant\varepsilon/2\}} \\
\geqslant & 2P(|\xi|\leqslant\varepsilon/2)\operatorname{var}\xi I_{\{|\xi|\leqslant\varepsilon/2\}} - \varepsilon^2 P(|\xi|>\varepsilon/2)/2.
\end{aligned}$$

由此,再加上(4.3.30),(4.3.37)及已证之(4.3.33),我们得:对任给 $\tau>0$,

$$\begin{aligned}
& 2\min_{1\leqslant k\leqslant k_n} P(|\xi_{n,k}|\leqslant\tau)\sum_{k=1}^{k_n}\operatorname{var}\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}} \\
& \leqslant 2\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|\leqslant\tau)\operatorname{var}\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}} \\
& \leqslant \sum_{k=1}^{k_n}\operatorname{var}\xi^s_{n,k}I_{\{|\xi^s_{n,k}|\leqslant 2\tau\}} + 2\tau^2\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|>\tau) \\
& \leqslant -K\sum_{k=1}^{k_n}\log[|f_{n,k}|^2(1)] + 2\tau^2\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|>\tau) \\
& \to 0.
\end{aligned}$$

但是,(4.3.31)意味着 $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n} P(|\xi_{n,k}|\leqslant\tau)\to 1$,故上式说明了(4.3.35)对任 $\tau$ 成立.

对任给之 $\varepsilon>0$ 和 $\tau>0$,由已证之(4.3.33)得

$$P\left\{\left|S_n-\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}}\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}P(|\xi_{n,k}|\geqslant\tau)\to 0.$$

此式与(4.3.32)一起推知

$$\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}}\xrightarrow{P}0.$$

但是由已证之(4.3.35)，对每 $\varepsilon>0$ 又有

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}}-\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}}\right|\geqslant\varepsilon\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{k_n}\operatorname{var}\xi_{n,k}I_{\{|\xi_{n,k}|\leqslant\tau\}}/\varepsilon^2\rightarrow 0.$$

这又证得了(4.3.34). 总之，我们在(4.3.31)和(4.3.32)之下证得了(4.3.33)—(4.3.35). 证完.

### 3.4 独立 r.v. 序列的弱大数律

我们先把 3.3 的讨论先落实到独立 r.v. 序列的部分和的情况.

**定理 4.3.15** 对独立 r.v. 序列 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 和实数列 $0<a_n\uparrow\infty$,

(4.3.38) $$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{P}0$$

当且仅当下列三式成立：

(4.3.39) $$\sum_{k=1}^{n}P(|\xi_k|\geqslant a_n)\rightarrow 0;$$

(4.3.40) $$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_kI_{\{|\xi_k|<a_n\}}\rightarrow 0;$$

(4.3.41) $$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{var}\xi_kI_{\{|\xi_k|<a_n\}}\rightarrow 0.$$

**证明** 先证“当”的部分. 由(4.3.41)推知

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_kI_{\{|\xi_k|<a_n\}}-\sum_{k=1}^{n}E\xi_kI_{\{|\xi_k|<a_n\}}\right|/a_n\geqslant\varepsilon\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{var}\xi_kI_{\{|\xi_k|<a_n\}})/(\varepsilon^2a_n^2)\rightarrow 0$$

对任给 $\varepsilon>0$ 成立. 此式加上(4.3.40)又推知

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k I_{\{|\xi_k|<a_n\}}\xrightarrow{P}0.$$

但是，由(4.3.39)又有

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{k_n}\xi_k-\sum_{k=1}^{k_n}\xi_k I_{\{|\xi_k|<a_n\}}\right|/a_n\geqslant\varepsilon\right)$$

$$=P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k I_{\{|\xi_k|\geqslant a_n\}}\right|>\varepsilon a_n\right)$$

$$\leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{|\xi_k|\geqslant a_n\}\right)$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}P(|\xi_k|\geqslant a_n)\to 0,$$

故在条件(4.3.39)—(4.3.41)下，(4.3.38)成立.

再证"仅当"部分. 对每 $n\geqslant1, 1\leqslant k\leqslant n$，令

$$\xi_{n,k}=\xi_k/a_n.$$

对$\{\xi_{n,k}, 1\leqslant k\leqslant n, n\geqslant 1\}$用定理 4.3.14 知只需证由条件 $0<a_n\uparrow\infty$ 和(4.3.38)可一起推出：对任给 $\varepsilon>0$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}P(|\xi_k|\geqslant\varepsilon a_n)\to 0. \tag{4.3.42}$$

用反证法，如(4.3.42)不成立，必有 $\varepsilon_0>0$ 和 $\delta_0>0$ 以及$\{n\}$的子序列 $1\leqslant N_1<\cdots<N_n\to\infty$ 使

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N_n}P(|\xi_k|\geqslant\varepsilon_0 a_{N_n})\geqslant\delta_0.$$

于是，对每 $n\geqslant1$，存在 $k_n$ 满足 $1\leqslant k_n\leqslant N_n$ 使

$$P(|\xi_{k_n}|\geqslant\varepsilon_0 a_{N_n})\geqslant\delta_0. \tag{4.3.43}$$

如果$\{k_n, n\geqslant1\}$是有界序列，即存在 $K>0$ 使 $1\leqslant k_n\leqslant K$，则由 $a_n\uparrow\infty$推知

$$|\xi_{k_n}|/a_{N_n}\leqslant(\max_{1\leqslant k\leqslant K}|\xi_k|)/a_{N_n}\to 0.$$

与(4.3.43)矛盾. 如果$\{k_n, n\geqslant1\}$是无界序列，无妨设 $k_n\uparrow\infty$，则由(4.3.43)推知

$$P(|\xi_{k_n}| \geqslant \varepsilon_0 a_{k_n}) \geqslant P(|\xi_{k_n}| \geqslant \varepsilon_0 a_{N_n}) \geqslant \delta_0.$$

这又与(4.3.38)之下列推论

$$|\xi_n/a_n| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|/a_n + \left|\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\right|/a_{n-1} \xrightarrow{P} 0$$

发生矛盾. 因此,(4.3.42)必须成立. 证完.

下面再把定理 4.3.15 的讨论落实到 i.i.d. 的 r.v. 序列的情况.

**定理 4.3.16** 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是 i.i.d. 的 r.v. 序列, $f$ 是 $\xi_1$ 的 c.f., $\alpha>1/2$. 则下列三种说法等价:

(1) 存在$\{b_n, n\geqslant 1\}$使

$$n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - b_n \xrightarrow{P} 0;$$

(2) $nP(|\xi_1| \geqslant n^\alpha) \to 0$;

(3) $|\log|f||^\alpha$ 在 $t=0$ 可导.

**证明** 据引理 4.3.12,(1)等价于

$$n^{-\alpha}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^s \xrightarrow{P} 0. \tag{4.3.44}$$

据定理 4.3.15,(4.3.44)又等价于下列三式

$$nP(|\xi_1^s| \geqslant n^\alpha) \to 0; \tag{4.3.45}$$

$$n^{1-\alpha}E\xi_1^s I_{\{|\xi_1^s|<n^\alpha\}} \to 0; \tag{4.3.46}$$

$$n^{1-2\alpha}\mathrm{var}\,\xi_1^s I_{\{|\xi_1^s|<n^\alpha\}} \to 0. \tag{4.3.47}$$

由于 $\xi_1^s$ 是对称的,故

$$E\xi_1^s I_{\{|\xi_1^s|<n^\alpha\}} = 0,$$

从而(4.3.46)成立. 又注意

$$\begin{aligned} n^{1-2\alpha}\mathrm{var}\,\xi_1^s I_{\{|\xi_1^s|\leqslant n^\alpha\}} &= n^{1-2\alpha}E(\xi_1^s)^2 I_{\{|\xi_1^s|\leqslant n^\alpha\}} \\ &\leqslant n^{1-2\alpha}\sum_{k=1}^{n}k^{2\alpha}P((k-1)^\alpha < |\xi_1^s| \leqslant k^\alpha) \end{aligned} \tag{4.3.48}$$

$$\leqslant Cn^{1-2\alpha}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}j^{2\alpha-1}P((k-1)^{\alpha}<|\xi_1^s|\leqslant k^{\alpha})$$

$$\leqslant Cn^{1-2\alpha}\sum_{j=1}^{n}j^{2\alpha-1}P(|\xi_1^s|\geqslant j^{\alpha})$$

$$\leqslant C\Big[\sum_{j=1}^{n}j^{2(\alpha-1)}\Big]^{-1}\sum_{j=1}^{n}j^{2(\alpha-1)}\cdot j\,P(|\xi_1^s|\geqslant j^{\alpha}),$$

这里,$C$ 表一正常数.由于上式之右端是序列$\{jP(|\xi_1^s|\geqslant j^{\alpha}),1\leqslant j\leqslant n\}$之加权平均,故当(4.3.45)成立时一定趋于0.这样,我们就证明了(4.3.45)蕴含(4.3.47).于是,(4.3.45)—(4.3.47)等价于(4.3.45),从而(1)等价于(2).

下面我们证明(1)等价于(3).根据前面的说明,为此只需证(4.3.44)等价于(3).注意 $\xi_1^s$ 的 c.f. 是$|f|^2$,我们有

$$(4.3.44)\Leftrightarrow|f|^{2n}(t/n^{\alpha})\to 1,\quad t\in\boldsymbol{R}$$
$$\Leftrightarrow n\log|f|(t/n^{\alpha})\to 0,\quad t\in\boldsymbol{R}.$$

因此,如(4.3.44)成立,则

$$(n^{-\alpha}|t|)^{-1}|\log|f|(t/n^{\alpha})|^{\alpha}\to 0,\quad n\to\infty$$

对$|t|\in[1,2^{\alpha})$一致成立.由此不难见

$$\lim_{s\to 0}|\log|f|(s)|^{\alpha}/s=0, \tag{4.3.49}$$

即(3)成立而且导数之值为0.反之,如(3)成立,由于$|\log|f||^{\alpha}$是偶函数,故其在 $t=0$ 的导数必为0,故(4.3.49)成立.由此不难推知对每 $t\in\boldsymbol{R}$,$n\log|f|(t/n^{\alpha})\to 0$ 从而(4.3.44)成立.这样,我们证得了(1)等价于(3).定理证完.

作为定理4.3.16之推论,我们得

**系 4.3.17** 如$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是i.i.d.的r.v.列,$f$ 是 $\xi_1$ 之 c.f.,则

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{P}0$$

之充要条件是

$$E\xi_1 I_{\{|\xi_1|<n\}} \to 0$$

成立并且下列两条件之一成立：

$$nP(|\xi_1| \geqslant n) \to 0;$$

$$\log|f| \text{ 在 } t = 0 \text{ 可导.}$$

## 习 题 4.3

1. 证明系 4.3.6 和系 4.3.7.

2. 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是独立 r.v. 序列，存在 $K>0$ 使$\sup\limits_{n\geqslant 1}|\xi_n|\leqslant K$ a.s.. 证明：如 $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{var}\xi_k \to \infty$，则

$$\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E\xi_k)\Big/\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{var}\xi_k\Big)^{1/2} \xrightarrow{d} \Phi.$$

3. 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是独立 r.v. 序列，对每 $n\geqslant 1$

$$P(\xi_n = \pm 2^n) = 2^{-(n+1)}, \quad P(\xi_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}).$$

证明：$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$不满足 Lindeberg 条件但中心极限定理仍成立. 这与定理 4.3.5 之结论是否矛盾？为什么？

4. 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是独立 r.v. 列，

$$P(\xi_n = \pm n^{\alpha}) = 1/n^{2\beta}, \quad P(\xi_n = 0) = 1 - 1/n^{\beta},$$

其中$(\beta-1)/2<\alpha$. 证明：Lindeberg 条件成立当且仅当 $0\leqslant\beta<1$.

5. 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$是独立同分布 r.v. 列，$f$ 是 $\boldsymbol{R}^k$ 上的对称函数，定义$\{U_n, n\geqslant k\}$如习题 2.3 之 12. 证明：如果 $Ef^2(\xi_1,\cdots,\xi_k)<\infty$，$Ef(\xi_1,\cdots,\xi_k)=\theta$，则

$$n^{1/2}(U_n - \theta)/\sigma \xrightarrow{d} \Phi,$$

其中

$$\sigma^2 = k^2 E[E^2(f(\xi_1,\cdots,\xi_k)|\xi_1) - \theta^2].$$

提示：考虑独立同分布的 r.v. 列

$$E(f(\xi_i,\xi_2,\cdots,\xi_k)|\xi_i), \quad i\geqslant k+1,$$

其部分和记为 $S_n$，则 $U_n-S_n\xrightarrow{P}0$.

6. 设 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 独立同分布，其共同分布密度

$$p(x)=\begin{cases}1/x^3, & x>1,\\ -1/x^3, & x<-1.\end{cases}$$

证明：$S_n/(n\log n)^{1/2}\xrightarrow{d}\Phi$（注意 $\xi_1$ 的方差不存在）.

7. 设 $\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 满足 $k_n\to\infty$，对每 $n\geqslant 1$，$\xi_{n,1},\cdots,\xi_{n,k_n}$ 独立同分布. 写出此时 Lindeberg 条件的特殊形式.

8. 设 $\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 是独立 r.v. 阵列，对每 $n\geqslant 1$，每 $1\leqslant k\leqslant k_n$，满足

$$P(\xi_{n,k}=1)=p_n,\quad P(\xi_{n,k}=0)=q_n,$$

而 $p_n+q_n=1$. 记 $S_n=\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k}$，证明：

(1) 如 $k_np_n\to 0$，则 $S_n\xrightarrow{P}0$；

(2) 如 $k_np_n\to\lambda,0<\lambda<\infty$，则 $S_n\xrightarrow{d}P_\lambda$，其中 $P_\lambda$ 表示参数为 $\lambda$ 的 Poisson 分布的 d.f.；

(3) 如 $k_np_nq_n\to\infty$，则

$$(S_n-k_np_n)/(k_np_nq_n)^{1/2}\xrightarrow{d}\Phi.$$

9. 设 r.v. $\beta_{n_1,n_2}$ 遵从参数为 $(n_1,n_2)$ 的 Beta 分布，即 $\beta_{n_1,n_2}\sim B_{n_1,n_2}$（见习题 1.1 之 23）. 证明

(1) 固定 $n_1$，当 $n_2\to\infty$ 时

$$n_2\beta_{n_1,n_2}\xrightarrow{d}\Gamma_{n_1};$$

(2) 当 $n_1,n_2\to\infty$ 时，

$$\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)^{1/2}[(n_1+n_2)\beta_{n_1,n_2}-n_1]\xrightarrow{d}\Phi.$$

10. 设 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 是独立同分布的 r.v. 列，其共同 d.f. 是 $F$，

以 $\xi_{n,1}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{n,n}$ 记 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的次序统计量. 对任意的 $a_n>0$ 和 $b_n\in\boldsymbol{R}$,证明下列三命题等价:

(1) 对某个 $k\geqslant1$,存在 d.f. $G$ 使

$$(\xi_{n,k}-b_n)/a_n\xrightarrow{d}G;$$

(2) 存在取值于 $\boldsymbol{R}$ 的非降右连续函数 $v$,满足 $v(-\infty)=0$ 和 $v(+\infty)=\infty$ 使对 $v$ 的每一个连续点 $x$,有

$$(n+1)F(a_nx+b_n)\to v(x);$$

(3) 对每 $k\geqslant1$,存在 d.f. $G_k$,使

$$(\xi_{n,k}-b_n)/a_n\xrightarrow{d}G_k,$$

并且下列关系式成立:

$$G_k=\Gamma_k(v),\quad k\geqslant1.$$

11. 设如题 10. 又设正整数列$\{k_n,n\geqslant1\}$满足

$$k_n\wedge(n-k_n)\to\infty.$$

对任意 $a_n>0$ 和 $b_n\in\boldsymbol{R}$,证明:存在 d.f. $G$ 使

$$(\xi_{n,k_n}-b_n)/a_n\xrightarrow{d}G$$

当且仅当存在取值于 $\boldsymbol{R}^-$ 的非降右连续且满足 $u(-\infty)=-\infty$, $u(\infty)=\infty$的函数 $u$,使对于它的每一个连续点 $x$. 均有

$$(n+1)^{3/2}[F(a_nx+b_n)-k_n/(n+1)]/[k_n(n-k_n+1)]^{1/2}\to u(x);$$

其中 $G$ 与 $u$ 满足关系

$$G(x)=\Phi(u(x)),\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

12. 设$\{U_n,n\geqslant1\}$是独立同为(0,1)上均匀分布的 r.v. 列, $U_{n,1}\leqslant\cdots\leqslant U_{n,n}$是 $U_1,\cdots,U_n$ 的次序统计量,$\{k_n,n\geqslant1\}$是满足条件

$$k_n\to\infty,\quad k_n/(n+1)\to0$$

的正整数列. 证明

$$(n-1)[U_{n,k_n}-k_n/(n+1)]/k_n^{1/2}\xrightarrow{d}\Phi(x).$$

13. 设$\{(\xi_{1,n},\cdots,\xi_{m,n}),n\geqslant 1\}$是独立同分布随机向量序列，对每 $n\geqslant 1$，

$$E\xi_{i,n}=0,\quad i=1,\cdots,m;$$
$$\Sigma=(\operatorname{cov}(\xi_{i,n},\xi_{j,n}))_{m\times m}=(\sigma_{i,j})_{m\times m}.$$

记 $S_{i,n}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{i,k},i=1,\cdots,m,n\geqslant 1$．证明：

$$(S_{1,n}/\sqrt{n},\cdots,S_{m,n}/\sqrt{n})\xrightarrow{d}N(0,\Sigma),$$

其中 $N(0,\Sigma)$是均值向量为 0，协方差阵为 $\Sigma$ 的 $m$ 维正态分布．

14. 对每 $n\geqslant 1$，以 $m_n$ 记 r. v. $\xi_n$ 的中位数．证明如 $\xi_n\xrightarrow{P}0$，则 $m_n\to 0$．

15. 称 $\boldsymbol{R}$ 的子集 $A$ 是对称的，如 $x\in A$，则 $-x\in A$．证明：如果 $A\in\mathscr{R}$ 是对称的，$\xi^s$ 是某对称化 r. v.，则

$$(\xi^s I_{\{\xi^s\in A\}},\xi^s I_{\{\xi^s\in A^c\}})\stackrel{d}{=}(\xi^s I_{\{\xi^s\in A\}},-\xi^s I_{\{\xi^s\in A^c\}}).$$

如果$\{A_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{R}$ 是一对称集列，又$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$独立，则

$$\{(\xi_n^s I_{\{\xi_n^s\in A_n\}},\xi_n^s I_{\{\xi_n^s\in A_n^c\}}),n\geqslant 1\}$$
$$\stackrel{d}{=}\{(\xi_n^s I_{\{\xi_n^s\in A_n\}},-\xi_n^s I_{\{\xi_n^s\in A_n^c\}}),n\geqslant 1\}.$$

注：两个随机元 $\eta$ 和 $\zeta$ 如有相同之分布，记为 $\eta\stackrel{d}{=}\zeta$．

16. 证明对任一 r. v. 列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$，总存在 $0<a_n\uparrow\infty$使

$$\xi_n/a_n\xrightarrow{P}0.$$

17. 证明对任 r. v. 列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$，下列三命题等价：

(1) 存在 $b_n\in\boldsymbol{R}$ 使 $\xi_n-b_n\xrightarrow{P}0$；

(2) $\xi_n^s\xrightarrow{P}0$；

(3) $\xi_n-m(\xi_n)\xrightarrow{P}0$．

18. 证明对任 r. v. 列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$，

$$\xi_n\xrightarrow{P}0$$

当且仅当 $E[|\xi_n|/(1+|\xi_n|)]\to 0$.

19. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立 r.v. 列,

$$P(\xi_n=-\log n)=P(\xi_n=\log n)=1/2.$$

证明:$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{P}0$.

20. 设对 r.v. 列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$,存在 $K>0$ 使$\sup\limits_{n\geqslant 1}|\xi_n|\leqslant K$ a.s..

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,证明

$$S_n/n\xrightarrow{P}0$$

当且仅当

$$(\mathrm{var}S_n)/n^2\xrightarrow{P}0.$$

21. 证明:如$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是 i.i.d. 的,$E|\xi_1|<\infty$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{P}E\xi_1.$$

22. 设 r.v. 列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$i.i.d.,$E|\xi_1|<\infty$. 又设 r.v. 列$\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$满足:对每 $M>0$,$\lim\limits_{n\to\infty}P(\lambda_n\geqslant M)=1$. 证明如果$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$与$\{\lambda_n,n\geqslant 1\}$独立,则

$$\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{[\lambda_n]}\xi_k\xrightarrow{P}E\xi_1.$$

23. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是独立 r.v. 序列. 记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k;\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}E\xi_kI_{\{\xi_k\leqslant n\}}.$$

试在条件

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}kP(|\xi_i|\geqslant k)\to 0$$

之下证明

$$(S_n-a_n)/n\xrightarrow{P}0.$$

请问,如果把上述条件减弱为

$$nP(|\xi_k| \geqslant n) \to 0,$$

结果是否还成立.

## 第四节　随机过程的依分布收敛

### 4.1　相对紧(relative compactness)和胎紧(tightness)

随机过程往往是取值于距离空间的随机元. 对于这种随机过程序列就也有依分布收敛的问题. 和"有限维"随机过程即随机变量和随机向量不同. "无穷维"随机过程的分布要通过有限维的概率测度族来刻画. 从系 4.1.10 可以看出, 对于"可数无穷维"的随机过程而言, 随机过程序列的依分布收敛就等价于每一个有限维分布列的弱收敛. 这种结局应该是比较理想的, 因为我们可以借助于 d.f. 和 c.f. 等手段来研究每一个有限维分布列的弱收敛问题, 进而解决随机过程列的依分布收敛问题. 遗憾的是, 对于一般"无穷维"的情况, 类似于系 4.1.10 的结论未必永远是正确的, 我们比较熟悉的$(C[0,1],\mathscr{R}_C[0,1])$就是一例.

对每 $n\geqslant 1$, 令

$$x_t^{(n)} = \begin{cases} nt, & 0 \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 2 - nt, & 1/n \leqslant t \leqslant 2/n, \\ 0, & 2/n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

再令 $x_t^{(0)}=0, 0\leqslant t\leqslant 1$. 易见

$$x^{(0)} = (x_t^{(0)}, 0 \leqslant t \leqslant 1), \quad x^{(n)} = (x_t^{(n)}, 0 \leqslant t \leqslant 1) \in C[0,1].$$

定义$(C[0,1],\mathscr{R}_C[0,1])$上的概率测度 $\mu$ 和 $\{\mu_n, n\geqslant 1\}$, 使

$$\mu(\{x^{(0)}\}) = 1;$$

$$\mu_n(\{x^{(n)}\}) = 1, \quad n \geqslant 1.$$

由于对每 $0<t_1<\cdots<t_k\leqslant 1$, 当 $n>2/t_1$ 时均有

$$\mu_n \pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1} = \mu \pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1},$$

故$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$的有限维概率测度族总是弱收敛的.但是很容易看出,概率测度列$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$并不弱收敛.

为什么会出现上面的问题呢?经过一番考察就会发现,主要原因是该例中的概率测度列缺乏某种弱收敛意义下的紧性.事实上,我们有如下的正面结论.

**命题 4.4.1** 设$(C[0,1],\mathscr{R}_C[0,1])$上的概率测度列满足下列条件:对$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$的任一子列$\{\mu_{n'},n'\geqslant 1\}$,存在$\{\mu_{n'},n'\geqslant 1\}$的子列$\{\mu_{n''},n''\geqslant 1\}$和$(C[0,1],\mathscr{R}_C[0,1])$上的概率测度$\mu''$使$\mu_{n''}\xrightarrow{w}\mu''$.如果对每$0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant 1$,存在$\boldsymbol{R}^k$上的概率测度$\mu_{t_1,\cdots,t_k}$使

$$\mu_n\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\xrightarrow{w}\mu_{t_1,\cdots,t_k},\tag{4.4.1}$$

则在$(C[0,1],\mathscr{R}_C[0,1])$有唯一的概率测度$\mu$使

$$\mu_n\xrightarrow{w}\mu,$$

这个概率测度$\mu$满足:对每$0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant 1$,

$$\mu\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}=\mu_{t_1,\cdots,t_k}.\tag{4.4.2}$$

**证明** 设$\{\mu_{n'},n'\geqslant 1\}$是$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$的一个子列,$\mu'$是$C[0,1]$上的概率测度而且$\mu_{n'}\xrightarrow{w}\mu'$.则由定理 4.1.7 知对每$0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant 1$,

$$\mu_{n'}\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}\xrightarrow{w}\mu'\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}.$$

上式与(4.4.1)相比较,我们得

$$\mu'\pi_{t_1,\cdots,t_k}^{-1}=\mu_{t_1,\cdots,t_k}.$$

这说明$\{\mu_{t_1,\cdots,t_k},0\leqslant t_1<\cdots<t_k\leqslant 1\}$唯一确定了$\mu'$(参见习题 1.4 之 8).于是,$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$的任一弱收敛子列均收敛到同一个概率测度$\mu$,它使(4.4.2)成立.

我们断言$\mu_n\xrightarrow{w}\mu$.如不然,必存在$B\in\mathscr{R}_C[0,1]$满足$\mu(\partial B)=0$且使

$$|\mu_{n'}(B) - \mu(B)| \geqslant \varepsilon_0$$

对某 $\varepsilon_0 > 0$ 和无穷多个 $n'$ 成立. 这势必与从 $\{\mu_{n'}, n' \geqslant 1\}$ 中可以抽取子列 $\{\mu_{n''}, n'' \geqslant 1\}$ 使 $\mu_{n''} \xrightarrow{w} \mu$ 相矛盾. 命题证完.

命题假设的条件称为相对紧条件. 对于一般的距离空间, 相对紧的定义如下.

**定义 4.4.1** 距离空间 $X$ 上的概率测度族 $\mathscr{M}$ 称为是相对紧的, 如对 $\mathscr{M}$ 中的任一序列 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$, 存在 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$ 的子列 $\{\mu_{n'}, n' \geqslant 1\}$ 和 $X$ 上的概率测度 $\mu'$ 使 $\mu_{n'} \xrightarrow{w} \mu'$.

从前面的例子和命题可见, 相对紧是十分重要的概念. 因此, 寻求判别一个概率测度族是否相对紧的条件成为急待解决的问题. 考察最简单的情况. 设 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的概率测度, $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 是对应的 d.f. 列. 根据 Helly 定理, 对 $\{F_n, n \geqslant 1\}$ 的每一个子列 $\{F_{n'}, n' \geqslant 1\}$, 存在一个 $\{F_{n'}, n' \geqslant 1\}$ 的子列 $\{F_{n''}, n'' \geqslant 1\}$ 和一个取值于 $[0,1]$ 的非降右连续函数 $F''$, 使

$$\lim_{n'' \to \infty} F_{n''}(x) = F''(x), \quad x \in C(F'').$$

于是, 欲使 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$ 相对紧, 只需要求每一个使上式成立之 $F''$ 都是 d.f., 即满足

$$\lim_{x \to -\infty} F''(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} F''(x) = 1.$$

不难看出, 只要原来的测度列 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$ 符合条件

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \inf_{n \geqslant 1} \mu_n([a,b]) = 1, \tag{4.4.3}$$

上述要求就一定可以达到. 我们把 $\boldsymbol{R}$ 中满足条件(4.4.3)的概率测度列称为胎紧的(tight). 这个概念在一般距离空间推广成

**定义 4.4.2** 设 $\mathscr{M}$ 是距离空间 $X$ 上之概率测度族. 如果对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $X$ 之紧集 $K$ 使

$$\inf_{\mu \in \mathscr{M}} \mu(K) > 1 - \varepsilon, \tag{4.4.4}$$

则称 $\mathscr{M}$ 是胎紧的.

从前面所说的 $\boldsymbol{R}$ 上概率测度的情况看，如果概率测度族是胎紧的，那么它也是相对紧的. 在下一小节，我们将对一般距离空间上的概率测度族证明同样的结论. 此外，我们还将讨论上述结论的逆命题.

相对紧和胎紧的概念虽然都是对一个给定的距离空间 $X$ 上的概率测度族定义的，但是人们也常常把这些术语用到取值于 $X$ 的随机元族上. 当取值于 $X$ 的随机元族 $\{\xi_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 对应的分布族 $\{P\xi_\lambda^{-1},\lambda\in\Lambda\}$ 是相对紧或胎紧的，我们就说 $\{\xi_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 分别是相对紧的或胎紧的. 以下的讨论只对概率测度族进行，把它们“翻译”成随机元族的说法应该是十分容易的事情.

### 4.2 Prokhorov 定理

我们先证距离空间上的概率测度族如胎紧必相对紧，采用先具体后一般的路线来完成.

**命题 4.4.2** 对任何正整数 $k$，如 $\boldsymbol{R}^k$ 上的概率测度族 $\mathscr{M}$ 胎紧，则必相对紧.

**证明** 设 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{M}$. 由 Helly 定理知存在 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}$ 的子列 $\{\mu_{n'},n'\geqslant 1\}$ 及 $\boldsymbol{R}^k$ 上的测度 $\mu'$ 使

$$\mu_{n'}([a,b])\to\mu'([a,b])$$

对 $\mu'$ 的每一个连续区间 $[a,b]$ 成立，这里对 $a=(a_1,\cdots,a_k)$，$b=(b_1,\cdots,b_k)\in\boldsymbol{R}^k$，区间定义为

$$[a,b]=\{x=(x_1,\cdots,x_k):a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,\cdots,k\},$$

而 $\mu'$ 的连续区间乃是指符合条件

$$\mu'((a,b))=\mu'([a,b])$$

的区间，其中

$$(a,b)=\{x=(x_1,\cdots,x_k):a_i<x_i<b_i,i=1,\cdots,k\}.$$

因此，为了完成命题的证明，只需说明 $\mu'$ 是 $\boldsymbol{R}^k$ 上的概率测度. 由于 $\mathscr{M}$ 胎紧因而 $\{\mu_{n'},n'\geqslant 1\}$ 胎紧，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 $a<b$ 使 $[a,b]$

是 $\mu'$ 的连续区间而且 $\inf\limits_{n'\geqslant 1}\mu_{n'}([a,b])\geqslant 1-\varepsilon$. 于是

$$\mu'(\boldsymbol{R}^k)\geqslant \mu'([a,b])=\lim_{n'\to\infty}\mu_{n'}([a,b])\geqslant 1-\varepsilon.$$

上式再令 $\varepsilon\to 0$，立得 $\mu'(\boldsymbol{R}^k)=1$. 这表明 $\mu'$ 确是概率测度. 证完.

**引理 4.4.3** 若 $\mathscr{M}$ 是距离空间 $X$ 上胎紧之概率测度族，$f$ 是 $X$ 到距离空间 $Y$ 的连续映射，则 $\mathscr{M}f^{-1}=:\{\mu f^{-1}:\mu\in\mathscr{M}\}$ 是 $Y$ 上胎紧之概率测度族.

**证明** 对任给 $\varepsilon>0$，取 $X$ 之紧集 $K$ 使(4.4.4)成立. 由于 $K\subset f^{-1}(f(K))$，故由(4.4.4)推知

$$\inf_{\mu\in\mathscr{M}}(\mu f^{-1})(f(K))=\inf_{\mu\in\mathscr{M}}\mu(f^{-1}(f(K)))\geqslant\inf_{\mu\in\mathscr{M}}\mu(K)>1-\varepsilon.$$

这说明了 $\mathscr{M}f^{-1}$ 胎紧——因为 $f$ 连续的条件保证了 $f(K)$ 是 $Y$ 中之紧集. 证完.

**命题 4.4.4** $\boldsymbol{R}^\infty$ 上胎紧的概率测度族必是相对紧的.

**证明** 设 $\mathscr{M}$ 是 $\boldsymbol{R}^\infty$ 上胎紧的概率测度族. 对每 $k\geqslant 1$，以 $\pi_k$ 记 $\boldsymbol{R}^\infty$ 到 $\boldsymbol{R}^k$ 的投影映射. 由于 $\pi_k$ 连续，故由引理 4.4.3 知 $\mathscr{M}\pi_k^{-1}$ 还是胎紧的. 再由命题 4.4.2，又推知 $\mathscr{M}\pi_k^{-1}$ 也是相对紧的.

设 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{M}$. 由 $\mathscr{M}\pi_1^{-1}$ 相对紧推知存在 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}$ 的子列 $\{\mu_{n_i^{(1)}},i\geqslant 1\}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 上之概率测度 $\nu^{(1)}$ 使

$$\mu_{n_i^{(1)}}\pi_1^{-1}\xrightarrow{w}\nu^{(1)}.$$

由 $\mathscr{M}\pi_2^{-1}$ 相对紧又推知存在 $\{\mu_{n_i^{(1)}},i\geqslant 1\}$ 的子列 $\{\mu_{n_i^{(2)}},i\geqslant 1\}$ 和 $\boldsymbol{R}^2$ 上的概率测度 $\nu^{(2)}$ 使 $\mu_{n_i^{(2)}}\pi_2^{-1}\xrightarrow{w}\nu^{(2)}$，从而

$$\mu_{n_i^{(2)}}\pi_k^{-1}\to\nu^{(k)},\quad k=1,2.$$

如此继续，对每 $m>1$，我们得到 $\{\mu_{n_i^{(m-1)}},i\geqslant 1\}$ 的子列 $\{\mu_{n_i^{(m)}},i\geqslant 1\}$ 及 $\boldsymbol{R}^m$ 上之概率测度 $\nu^{(m)}$ 使

$$\mu_{n_i^{(m)}}\pi_k^{-1}\xrightarrow{w}\nu^{(k)},\quad k=1,\cdots,m.$$

取 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}$ 的子列 $\{\mu_{n_i^{(i)}},i\geqslant 1\}$. 不难见

$$\mu_{n_i^{(i)}}\pi_k^{-1} \xrightarrow{w} \nu^{(k)}, \quad k \geqslant 1,$$

而且$\{\nu^{(k)}, k\geqslant 1\}$是相容的有限维概率测度族. 据定理 1.4.6, 在 $\boldsymbol{R}^{\infty}$ 上存在唯一的概率测度 $\mu$ 使得

$$\mu\pi_k^{-1} = \nu^{(k)}, \quad k \geqslant 1.$$

再利用系 4.1.10, 我们便得到

$$\mu_{n_i^{(i)}} \xrightarrow{w} \mu.$$

这说明了 $\mathscr{M}$ 是相对紧的. 证完.

为了进一步的讨论, 我们引进一些记号. 设 $X$ 是距离空间, $\mathscr{B}$ 是其 Borel 集系. 又设 $X^* \in \mathscr{B}$, $\mathscr{B}^* = X^* \cap \mathscr{B}$. 对于 $X^*$ 上的概率测度 $\nu$, 我们将以 $\nu^e$ 来表示 $X$ 上由下列方式“扩大”出来的概率测度:

$$\nu^e(B) = \nu(X^* \cap B), \quad B \in \mathscr{B}.$$

反过来, 对于 $X$ 上的概率测度 $\mu$, 我们将以 $\mu^r$ 记 $\mu$“限制”在 $X^*$ 上的测度, 其定义为

$$\mu^r(B^*) = \mu(B^*), \quad B^* \in \mathscr{B}^*.$$

不难见, 如果 $\mu(X^*)=1$, 那么 $\mu^r$ 还是一个概率测度. 又不难见, 对于这样约定的记号, 有

$$(\nu^e)^r = \nu;$$

而当 $\mu(X^*)=1$ 时, 有

$$(\mu^r)^e = \mu. \tag{4.4.5}$$

**引理 4.4.5** 如 $\mathscr{M}^*$ 是 $X^*$ 上胎紧之概率测度族, 则 $(\mathscr{M}^*)^e := \{\nu^e; \nu \in \mathscr{M}^*\}$ 亦是 $X$ 上胎紧之概率测度族; 如 $\mathscr{M}^*$ 是 $X^*$ 上相对紧之概率测度族, 则 $(\mathscr{M}^*)^e$ 亦是 $X$ 上相对紧之概率测度族; 如 $\mathscr{M}^*$ 是 $X^*$ 上胎紧之概率测度族且 $(\mathscr{M}^*)^e$ 相对紧, 则 $\mathscr{M}^*$ 相对紧.

**证明** 定义 $X^*$ 到 $X$ 的映射 $f(x)=x, x\in X^*$. 由于 $f$ 是连续映射, 故 $\mathscr{M}^*$ 胎紧时 $(\mathscr{M}^*)^e = \mathscr{M}^* f^{-1}$ 亦胎紧(引理 4.4.3), $\mathscr{M}^*$

相对紧时$(\mathscr{M}^*)^f=\mathscr{M}^* f^{-1}$亦相对紧(定理 4.1.7). 可见引理之前两个结论成立.

如果$(\mathscr{M}^*)^e$相对紧,对每$\{\nu_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{M}^*$必存在子列$\{\nu_{n'},n\geqslant 1\}$和 $X$ 上之概率测度$\mu$使

$$\nu_{n'}^e \xrightarrow{w} \mu.$$

如果$\mathscr{M}^*$又胎紧,对任给$\varepsilon>0$,取$X^*$的紧集$K$使对每$\nu\in\mathscr{M}^*$,均有

$$\nu^e(K)=\nu(K)>1-\varepsilon,$$

则由于$K$也是$X$中之紧集从而是闭集,得

$$\mu(X^*)\geqslant\mu(K)\geqslant\limsup_{n'\to\infty}\nu_{n'}^e(K)\geqslant 1-\varepsilon$$

(定理 4.1.1,(3)). 这说明

$$\mu(X^*)=1,$$

从而$\mu'$是$X^*$上的概率测度. 于是,对$X$中之任一开集$G$,我们有

$$\liminf_{n'\to\infty}\nu_{n'}(X^*\cap G)=\liminf_{n'\to\infty}\nu_{n'}^e(G)\geqslant\mu(G)=\mu'(X^*\cap G).$$

根据定理 4.1.1,(4),这意味着

$$\nu_{n'}\xrightarrow{w}\mu'.$$

因而如$\mathscr{M}^*$胎紧,$(\mathscr{M}^*)^e$相对紧,则$\mathscr{M}^*$相对紧. 第三个结论证完. 引理证完.

**命题 4.4.6** 设$X^*\in\mathscr{R}^\infty$. $X^*$上任一胎紧之概率测度族必相对紧.

**证明** 设$\mathscr{M}^*$是$X^*$上之胎紧概率测度族. 由引理 4.4.5 之第一个结论知$(\mathscr{M}^*)^e$是$X=\boldsymbol{R}^\infty$上胎紧之概率测度族. 由命题 4.4.4又知$(\mathscr{M}^*)^e$也是相对紧的. 由于$\mathscr{M}^*$胎紧而$(\mathscr{M}^*)^e$相对紧,据引理 4.4.5 之第三个结论即得出$\mathscr{M}^*$必相对紧. 证完.

**命题 4.4.7** $\sigma$紧距离空间胎紧之概率测度族必是相对紧的.

**证明** 若$X$是一个$\sigma$紧距离空间,则它可表为可数个紧集之并,因而是可分的. 据命题 1.2.5,$X$与$\boldsymbol{R}^\infty$的一个子集同胚. 把此

同胚映射记作 $f$，则 $\boldsymbol{R}^\infty$ 中与 $X$ 同胚的子集可记成 $f(X)$. 由 $X$ 是 $\sigma$ 紧的推知 $f(X)$是 $\sigma$ 紧的，故 $f(X)\in\mathscr{R}^\infty$. 如果 $\mathscr{M}$ 是 $X$ 上胎紧之概率测度族，则 $\mathscr{M}f^{-1}$是 $f(X)$上胎紧之概率测度族(引理 4.4.3)，因而由命题 4.4.6 知，它亦是相对紧的. 于是由定理 4.1.7 推知 $\mathscr{M}=(\mathscr{M}f^{-1})f$ 作为 $X$ 上之概率测度族亦是相对紧的. 证完.

**定理 4.4.8** 任一距离空间上胎紧之概率测度族必是相对紧的.

**证明** 若 $\mathscr{M}$ 是距离空间 $X$ 上胎紧之概率测度族，那么对每 $n\geqslant 1$ 可取 $X$ 之紧集 $K_n$ 使

$$\inf_{\mu\in\mathscr{M}}\mu(K_n)>1-1/n$$

成立. 令 $X^*=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$，易见对每 $\mu\in\mathscr{M}$，$\mu(X^*)=1$ 而且由 $\mathscr{M}$ 胎紧知 $\mathscr{M}':=\{\mu':\mu\in\mathscr{M}\}$是 $X^*$ 上胎紧之概率测度族. 但 $X^*$ 是 $\sigma$ 紧的，故 $\mathscr{M}'$ 亦是 $X^*$ 上相对紧之概率测度族(命题 4.4.7). 于是，利用引理 4.4.5 之第三个结论和(4.4.5)式即知 $\mathscr{M}=(\mathscr{M}')^e$ 亦是相对紧的. 证完.

下面我们讨论定理 4.4.8 的反问题，即距离空间相对紧的概率测度族在什么条件下也是胎紧的.

**引理 4.4.9** 如果可分距离空间 $X$ 上的概率测度族 $\mathscr{M}$ 是相对紧的，则对任给 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，存在有限个半径为 $\delta$ 的开球 $U_i$，$i=1,\cdots,k$ 使

$$\inf_{\mu\in\mathscr{M}}\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{k}U_i\Big)>1-\varepsilon. \tag{4.4.6}$$

**证明** 由于 $X$ 可分，对任给 $\delta>0$，定存在半径为 $\delta$ 的开球列 $\{U_i,i\geqslant 1\}$使

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i=X.$$

往证对任给 $\varepsilon>0$，存在 $k\geqslant 1$，使(4.4.6)成立. 如不然，存在 $\varepsilon_0>0$，

对每 $n\geqslant 1$,可取到一个 $\mu_n\in\mathscr{M}$ 使

$$\mu_n\Big(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\Big)\leqslant 1-\varepsilon_0.$$

由于 $\mathscr{M}$ 相对紧,故有 $\{\mu_n,n\geqslant 1\}$ 的子列 $\{\mu_{n_l},1<n_1<n_2<\cdots\}$ 和 $X$ 上的概率测度 $\mu_0$ 使

$$\mu_{n_l}\xrightarrow{w}\mu_0.$$

于是,由定理 4.1.1,(4)知对每 $n\geqslant 1$,

$$\mu_0\Big(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\Big)\leqslant\liminf_{l\to\infty}\mu_{n_l}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\Big)\leqslant\liminf_{l\to\infty}\mu_{n_l}\Big(\bigcup_{i=1}^{n_l}U_i\Big)\leqslant 1-\varepsilon_0.$$

上式中令 $n\to\infty$,推出矛盾:

$$1=\mu_0(X)=\lim_{n\to\infty}\mu_0\Big(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\Big)\leqslant 1-\varepsilon_0.$$

这说明"如不然"是不对的. 证完.

**定理 4.4.10** 完备可分距离空间上相对紧的概率测度族是胎紧的.

**证明** 设 $\mathscr{M}$ 是完备可分距离空间 $X$ 上相对紧的概率测度族. 由引理 4.4.9,对每 $\varepsilon>0,l\geqslant 1$,存在半径为 $\delta_l=1/l$ 的开球 $U_{l,1},\cdots,U_{l,i_l}$,使对每 $\mu\in\mathscr{M}$ 均有

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{i_l}U_{l,i}\Big)>1-\varepsilon/2^l.$$

令 $A=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{i_l}U_{l,i}$. 对任给 $\delta>0$,只要 $l$ 充分大使 $\delta_l<\delta$,那么 $U_{l,1},\cdots,U_{l,i_l}$ 就构成 $A$ 的有限 $\delta$ 网,因而 $A$ 是予紧集. 但 $X$ 完备,故 $A$ 是相对紧集. 取 $K=A^-$,则 $K$ 是紧集且

$$\mu(K)\geqslant\mu(A)>1-\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon/2^l=1-\varepsilon$$

对一切 $\mu\in\mathscr{M}$ 成立. 证完.

我们把定理 4.4.8 和定理 4.4.10 合起来叫做 Prokhorov 定

理. 从 Prokhorov 定理可见,对于完备可分距离空间的概率测度族而言,胎紧和相对紧是等价的.

### 4.3 $C[0,1]$上概率测度族胎紧的条件

对于$[0,1]$上的任一函数 $x=(x_t,0\leqslant t\leqslant 1)$,令

$$\omega_x(\delta) = \sup_{|s-t|<\delta} |x_t - x_s|, \quad \delta > 0$$

并称之为 $x$ 的连续模. 一个熟知的事实是:$x\in C[0,1]$当且仅当

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_x(\delta) = 0.$$

另一个我们要引用的重要事实是泛函分析中如下的 Arzela-Ascoli 定理:$C[0,1]$中的集 $A$ 是相对紧的当且仅当

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} \omega_x(\delta) = 0.$$

**定理 4.4.11** $C[0,1]$上的概率测度族 $\mathscr{M}$ 是胎紧的当且仅当对任给 $\alpha>0$ 和任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta\in(0,1)$使对每 $\mu\in\mathscr{M}$ 均有

$$\mu(\{x:\omega_x(\delta) \geqslant \alpha\}) < \varepsilon. \tag{4.4.7}$$

**证明** 如果 $\mathscr{M}$ 胎紧,对任给 $\varepsilon>0$,存在$C[0,1]$之紧集 $K$ 使 $\mu(K)>1-\varepsilon$ 对一切 $\mu\in\mathscr{M}$ 成立. 但由 Arzela-Ascoli 定理,对任给 $\alpha>0$,又存在 $\delta\in(0,1)$使 $\sup\limits_{x\in K}\omega_x(\delta)<\alpha$ ;故 $K\subset\{x:\omega_x(\delta)<\alpha\}$. 于是

$$\mu(\{x;\omega_x(\delta) \geqslant \alpha\}) \leqslant 1 - \mu(K) < \varepsilon,$$

(4.4.7)成立,必要性得证.

反之,如对每 $\varepsilon>0,n\geqslant 1$,存在 $\delta_n\in(0,1)$使

$$\mu(\{x:\omega_x(\delta_n) \geqslant 1/n\}) < \varepsilon/2^{n+1}$$

对一切 $\mu\in\mathscr{M}$ 成立,无妨设 $\delta_n\downarrow 0$. 令

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x;\omega_x(\delta_n) < 1/n\},$$

则对每 $n\geqslant 1$,有$\sup\limits_{x\in A}\omega_x(\delta_n)\leqslant 1/n$ 从而

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} \omega_x(\delta) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \omega_x(\delta_n) = 0.$$

令 $K=\bar{A}$ ,则 $K$ 是紧集(Arzela-Ascoli 定理)而且

$$\mu(K) \geqslant \mu(A) > 1-\varepsilon$$

对一切 $\mu \in \mathscr{M}$ 成立.这又说明了(4.4.7)对 $\mathscr{M}$ 胎紧是充分的.证完.

下面,我们利用定理 4.4.11 来给出一个 $C[0,1]$上概率测度列胎紧的比较容易验证的充分条件.

**系 4.4.12** 设$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$是 $C[0,1]$上的概率测度列.如对每 $\alpha>0,\varepsilon>0$,存在 $\delta\in(0,1)$和正整数 $n_0$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$\mu_n(\{x: \sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta} |x_s - x_t| \geqslant \alpha\}) < \delta\varepsilon \tag{4.4.8}$$

对一切 $0\leqslant t\leqslant 1$ 成立,则$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$胎紧(在(4.4.8)中,当 $t+\delta>1$ 时,约定 $\sup\limits_{t\leqslant s\leqslant t+\delta}|x_s-x_t|=\sup\limits_{t\leqslant s\leqslant 1}|x_s-x_t|$,下同).

**证明** 对任给 $\alpha>0,\varepsilon>0$,取 $\delta\in(0,1)$和 $n_0$ 使 $n\geqslant n_0$ 时(4.4.8)成立.令

$$k_\delta = \begin{cases} 1/\delta, & \text{如 } 1/\delta \text{ 是整数,} \\ [1/\delta]+1, & \text{如 } 1/\delta \text{ 不是整数.} \end{cases}$$

再令 $t_k=k\delta,k=0,1,\cdots,k_{\delta-1}$及 $t_{k_\delta}=1$.约定 $t_{-1}=0,t_{k_{\delta+1}}=1$,我们有

$$\begin{aligned} \omega_x(\delta) &= \max_{1\leqslant k\leqslant k_\delta} \sup_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k,|t-s|<\delta} |x_t - x_s| \\ &\leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant k_\delta} \max\Big( \sup_{t_{k-2}\leqslant s\leqslant t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k} |x_t - x_s|, \sup_{t_{k-1}\leqslant s,t\leqslant t_k} |x_t - x_s|, \\ &\qquad \sup_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k\leqslant s\leqslant t_{k+1}} |x_t - x_s| \Big). \end{aligned}$$

但是,

$$\begin{aligned} &\sup_{t_{k-2}\leqslant s\leqslant t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k} |x_t - x_s| \\ &\qquad \leqslant \sup_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k} |x_t - x_{t_{k-1}}| + 2\sup_{t_{k-2}\leqslant t\leqslant t_{k-1}} |x_t - x_{t_{k-2}}|; \\ &\qquad \sup_{t_{k-1}\leqslant s,t\leqslant t_k} |x_t - x_s| \leqslant 2\sup_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k} |x_t - x_{t_{k-1}}|; \\ &\qquad \sup_{t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k\leqslant s\leqslant t_{k+1}} |x_t - x_s| \end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}} |x_t - x_{t_k}| + 2 \sup_{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k} |x_t - x_{t_{k-1}}|.$$

故进而得

$$\omega_x(\delta) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant k \leqslant k_\delta} \sup_{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k} |x_t - x_{t_{k-1}}|.$$

于是当 $n \geqslant n_0$ 时，由(4.4.8)推知

$$\mu_n(\{x: \omega_x(\delta) \geqslant 3\alpha\}) \leqslant \sum_{k=1}^{k_\delta} \mu_n(\{x: \sup_{t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k} |x_t - x_{t_{k-1}}| \geqslant \alpha\})$$

$$\leqslant k_\delta \delta \varepsilon \leqslant (1+\delta)\varepsilon < 2\varepsilon.$$

据定理 4.4.11，这表明 $\{\mu_n, n \geqslant n_0\}$ 胎紧从而 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$ 胎紧. 证完.

### 4.4 Donsker 不变原理

为了在不长的篇幅内说清楚不变原理的基本思想，我们只考虑最简单的情况. 设 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 是 i. i. d. 的 r. v. 序列，$E\xi_1 = 0$，$E\xi_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. 记 $S_0 = 0$，又对每 $n \geqslant 1$，令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. 对每个 $n \geqslant 1$，我们按如下方式构造一个取值于 $C[0,1]$ 的随机过程 $W^{(n)} = \{W_t^{(n)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$：对每 $k = 0, 1, \cdots, n$，记 $t_k = k/n$；令 $W_{t_k}^{(n)} = S_k/(\sigma\sqrt{n})$；再定义 $\{W_t^{(n)}, t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k\}$ 为连接点 $(t_{k-1}, W_{t_{k-1}}^{(n)})$ 和点 $(t_k, W_{t_k}^{(n)})$ 之直线. 我们称这样得到的随机过程为序列 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 的部分和过程. 根据部分和过程的定义，容易写出其表达式：

$$W_t^{(n)} = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} [W_{t_{k-1}}^{(n)} + n(t - t_{k-1})(W_{t_k}^{(n)} - W_{t_{k-1}}^{(n)})] I_{[t_{k-1}, t_k]}(t), & 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

经过一番简单计算，易得

$$W_t^{(n)} = \{S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}\}/(\sigma\sqrt{n}), \tag{4.4.9}$$

其中 $$0 \leqslant t \leqslant 1.$$

所谓关于 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 的不变原理，乃是指这样一个命题：部分和过程 $\{W^{(n)}, n \geqslant 1\}$ 当 $n \to \infty$ 时依分布收敛到 $[0,1]$ 上的 Wiener 过程

$W$,即

(4.4.10) $$W^{(n)} \xrightarrow{d} W.$$

作为讨论不变原理的准备工作,我们先证明二个引理.

**引理 4.4.13** 设 $m$ 是 r.v. $\xi$ 的中位数,$E\xi^2<\infty$,则

(4.4.11) $$|E\xi - m| \leqslant (2\mathrm{var}\xi)^{1/2}.$$

**证明** 设 $E\xi \geqslant m$. 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\xi &= E(\xi - E\xi)^2 \geqslant E(\xi - E\xi)^2 I_{\{\xi \leqslant m\}} \\ &= E[(\xi - m) - (E\xi - m)]^2 I_{\{\xi \leqslant m\}} \\ &\geqslant (E\xi - m)^2 P(\xi \leqslant m) \\ &\geqslant (E\xi - m)^2/2,\end{aligned}$$

故(4.4.11)成立. 如果 $E\xi \leqslant m$,那么 $-\xi$ 的中位数是 $-m$ 而且 $E(-\xi) \geqslant -m$. 把已证之结论用于 r.v. $-\xi$ 便知(4.4.11)仍成立. 证完.

**引理 4.4.14** 设 r.v. $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 相互独立. 对 $k=1,\cdots,n$,记 $S_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$. 则对任给 $\varepsilon>0$,

(4.4.12) $$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k + m(S_n - S_k)| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2P(|S_n| \geqslant \varepsilon),$$

这里 $m(S_n - S_k)$ 表 $S_n - S_k$ 的中位数.

**证明** 我们只需要证明

(4.4.13) $$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} [S_k + m(S_n - S_k)] \geqslant \varepsilon) \leqslant 2P(S_n \geqslant \varepsilon).$$

事实上,如果(4.4.13)对任何独立 r.v. $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 和 $\varepsilon>0$ 成立,那么把它用于独立 r.v. $-\xi_1,\cdots,-\xi_n$ 便得

$$P(\min_{1\leqslant k\leqslant n} [S_k + m(S_n - S_k)] \leqslant -\varepsilon) \leqslant 2P(S_n \leqslant -\varepsilon).$$

再把上式与(4.4.13)相加便得到(4.4.12).

约定 $\inf\varnothing = n+1$. 令

$$\tau = \inf\{k: 1 \leqslant k \leqslant n, S_k + m(S_n - S_k) \geqslant \varepsilon\}.$$

易见

$$\{S_n \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{S_n \geq \varepsilon, \tau = k\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \{S_n \geq \varepsilon, S_k + m(S_n - S_k) \geq \varepsilon, \tau = k\}$$

$$\supset \bigcup_{k=1}^{n} \{S_n \geq S_k + m(S_n - S_k) \geq \varepsilon, \tau = k\}$$

$$\supset \bigcup_{k=1}^{n} \{S_n - S_k \geq m(S_n - S_k), \tau = k\}.$$

于是利用$\{\tau=k\}$与$\{S_n-S_k\geq m(S_n-S_k)\}$的独立性进而推知

$$P(S_n \geq \varepsilon) \geq \sum_{k=1}^{n} P(S_n - S_k \geq m(S_n - S_k))P(\tau = k)$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(\tau = k) = \frac{1}{2}P(\tau \leq n)$$

$$= \frac{1}{2}P(\max_{1\leq k\leq n}[S_k + m(S_n - S_k)] \geq \varepsilon),$$

即(4.4.13). 证完.

我们利用上述引理来证明通过 i. i. d. 序列由(4.4.9)确定的部分和过程是胎紧的.

**引理 4.4.15** 设$\{\xi_n, n\geq 1\}$是 i. i. d. 的 r. v. 序列，$E\xi_1=0$，$E\xi_1^2=\sigma^2\in(0,\infty)$. 则由(4.4.9)定义的随机过程列$\{W^{(n)}, n\geq 1\}$胎紧.

**证明** 根据系 4.4.12，只需证明对任给 $\alpha>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,1)$和正整数 $n_0$ 使当 $n\geq n_0$ 时

$$P(\sup_{t\leq s\leq t+\delta/2} |W_s^{(n)} - W_t^{(n)}| \geq 2\alpha) \leq 2\delta\varepsilon \tag{4.4.14}$$

对每 $0\leq t\leq 1$ 成立.

任意固定 $n\geq 1$，$0\leq k<n$ 和 $\delta\in(0,1)$. 记 $t_k=k/n$，$k=0,1,\cdots,n-1$. 设 $t_k\leq t\leq t_{k+1}$. 如果 $t+\delta/2\geq 1$，我们有

$$\sup_{t\leq s\leq t+\delta/2} |W_s^{(n)} - W_t^{(n)}| = \sup_{t\leq s\leq 1} |W_s^{(n)} - W_t^{(n)}|$$

$$\leqslant |W_t^{(n)} - S_k/(\sigma\sqrt{n})| + \sup_{t_k\leqslant s\leqslant 1} |W_s^{(n)} - S_k/(\sigma\sqrt{n})|$$

$$\leqslant 2 \max_{1\leqslant i\leqslant n-k} |S_{k+i} - S_k|/(\sigma\sqrt{n}).$$

这时只要 $n$ 和 $\delta$ 满足关系 $n>4/\delta$，就有

$$n - k = n(1 - t_{k+1} + t_1) \leqslant n(\delta/2 + \delta/4) < n\delta,$$

因而进一步推知

$$(4.4.15)\quad \sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta/2} |W_s^{(n)} - W_t^{(n)}| \leqslant 2 \max_{t\leqslant i\leqslant n\delta} |S_{k+i} - S_k|/(\sigma\sqrt{n}).$$

如果 $t+\delta/2<1$，那么定存在 $j, k\leqslant j<n$，使 $t_j\leqslant t+\delta/2\leqslant t_{j+1}$. 于是

$$\sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta/2} |W_s^{(n)} - W_t^{(n)}|$$

$$\leqslant |W_t^{(n)} - S_k/(\sigma\sqrt{n})| + \sup_{t\leqslant s\leqslant t+\delta/2} |W_s^{(n)} - S_k/(\sigma\sqrt{n})|$$

$$\leqslant 2 \max_{1\leqslant i\leqslant j+1-k} |S_{k+i} - S_k|/(\sigma\sqrt{n}).$$

这时如果还有 $n>4/\delta$，则

$$j + 1 - k = n(t_j - t_{k+1} + t_2) \leqslant n(\delta/2 + \delta/2) = n\delta,$$

从而(4.4.15)仍然成立.

对每 $k=1,\cdots,n$，以 $m_{n,k}$ 记 $S_n-S_k$ 的中位数. 由引理 4.4.13 可知

$$\max_{1\leqslant i\leqslant [n\delta]} |m_{[n\delta],i}| \leqslant (2n\delta)^{1/2}\sigma.$$

于是，利用 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 的 i.i.d. 性质和引理 4.4.14 知

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant [n\delta]} |S_{k+i} - S_k| \geqslant \alpha\sigma\sqrt{n})$$

$$= P(\max_{1\leqslant i\leqslant [n\delta]} |S_i| \geqslant \alpha\sigma\sqrt{n})$$

$$\leqslant P(\max_{1\leqslant i\leqslant [n\delta]} |S_i + m_{[n\delta],i}| + \max_{1\leqslant i\leqslant [n\delta]} |m_{[n\delta],i}| \geqslant \alpha\sigma\sqrt{n})$$

$$\leqslant P(\max_{1\leqslant i\leqslant [n\delta]} |S_i + m_{[n\delta],i}| \geqslant \sigma\sqrt{n}(\alpha - \sqrt{2\delta}))$$

$$\leqslant 2P(|S_{[n\delta]}| \geqslant \alpha\sigma\sqrt{n}/2)$$

当 $0<\delta\leqslant\alpha^2/8$ 时对任给 $\alpha>0$ 和 $k\geqslant 1$ 成立. 把此式与(4.4.15)结

合在一起,我们知:对任给 $\alpha>0$,

$$(4.4.16)\qquad P(\sup_{t\leq s\leq t+\delta/2}|W_s^{(n)}-W_t^{(n)}|\geq 2\alpha)$$
$$\leq 2P(|S_{[n\delta]}|\geq \alpha\sigma\sqrt{n}/2)$$

当 $0<\delta<\alpha^2/8$ 和 $n\geq 4/\delta$ 时对一切 $0\leq t\leq 1$ 成立.

任给 $\alpha>0$ 和 $\varepsilon>0$,利用(3.2.1)不难选取 $\delta\in(0,\alpha^2/8)$使

$$1-\Phi(\alpha/(2\sqrt{\delta}))<\delta\varepsilon/2.$$

但由系 4.3.6 我们知

$$\lim_{n\to\infty}P(|S_{[n\delta]}|\geq \alpha\sigma\sqrt{n}/2)=2[1-\Phi(\alpha/(2\sqrt{\delta}))].$$

因此,又存在 $n_0\geq 4/\delta$,使 $n\geq n_0$ 时

$$P(|S_{[n\delta]}|\geq \alpha\sigma\sqrt{n}/2)<\delta\varepsilon.$$

以此代入(4.4.16)便得(4.4.14). 证完.

下面,我们就来叙述和证明 Donsker 不变原理.

**定理 4.4.16** 设$\{\xi_n,n\geq 1\}$是 i.i.d. 的 r.v. 序列,$E\xi_1=0$,$E\xi_1^2=\sigma^2\in(0,\infty)$. 则对由(4.4.9)确定之$\{W^{(n)},n\geq 1\}$,和$[0,1]$的 Wiener 过程 $W$,(4.4.10)成立.

**证明** 由定理 4.4.8 和引理 4.4.15,我们知$\{W^{(n)},n\geq 1\}$相对紧. 于是根据命题 4.4.1,只需证:对每 $k\geq 1$,对每 $0=t_0\leq t_1<\cdots<t_k\leq 1$,有

$$(4.4.17)\qquad (W_{t_1}^{(n)},\cdots,W_{t_k}^{(n)})\xrightarrow{d}(W_{t_1},\cdots,W_{t_k}).$$

注意对每 $i=1,\cdots,k$,

$$E[W_{t_i}^{(n)}-S_{[nt_i]}/(\sigma\sqrt{n})]^2\leq E\xi_{[nt_i]+1}^2/(\sigma^2 n)=1/n\to 0,$$

我们知前式等价于

$$(S_{[nt_1]}/(\sigma\sqrt{n}),\cdots,S_{[nt_k]}/(\sigma\sqrt{n}))\xrightarrow{d}(W_{t_1},\cdots,W_{t_k}).$$

根据定理 4.1.7 并参见习题 4.1 之 13,不难见上式又等价于

$$\left(\frac{S_{[nt_1]}}{\sigma\sqrt{n}},\frac{S_{[nt_2]}-S_{[nt_1]}}{\sigma\sqrt{n}},\cdots,\frac{S_{[nt_k]}-S_{[nt_{k-1}]}}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\xrightarrow{d}\prod_{i=1}^{k}\Phi(x_i/(t_i-t_{i-1})^{1/2}).$$

由于上式左端诸分量独立，故它又等价于对每 $i=1,\cdots,k$,

$$(S_{[nt_i]}-S_{[nt_{i-1}]})/(\sigma\sqrt{n})\xrightarrow{d}\Phi(x/(t_i-t_{i-1})^{1/2}).$$

但是，$S_{[nt_i]}-S_{[nt_{i-1}]}$与 $S_{[nt_i]-[nt_{i-1}]}$有相同之分布故最终得(4.4.17)等价于对每 $i=1,\cdots,k$,

$$S_{[nt_i]-[nt_{i-1}]}/(\sigma\sqrt{n})\xrightarrow{d}\Phi(x/(t_i-t_{i-1})^{1/2}),$$

而后者乃系 4.3.6 之推论. 证完.

作为定理 4.4.16 和定理 4.1.7 之推论，可得

**系 4.4.17** 设如定理 4.4.16. 则对 $C[0,1]$上之任一连续泛函 $h$,有

$$h(W^{(n)})\xrightarrow{d}h(W).$$

通常，我们把系 4.4.17 称为泛函中心极限定理. 下面举一个泛函中心极限定理应用的例子.

**系 4.4.18** 设如定理 4.4.16，则

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k/(\sigma\sqrt{n})\xrightarrow{d}G(x),\tag{4.4.18}$$

其中

$$G(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

**证明** 对每 $x=(x_t,0\leqslant t\leqslant 1),y=(y_t,0\leqslant t\leqslant 1)\in C[0,1]$，我们有

$$\left|\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}x_t-\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}y_t\right|\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_t-y_t|,$$

故 $h(x)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}x_t$ 是 $C[0,1]$上的连续泛函. 于是，由系 4.4.17 立

得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k/(\sigma\sqrt{n}) = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} W_t^{(n)} \xrightarrow{d} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} W_t.$$

因此，为证(4.4.18)，只需证

(4.4.19) $$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} W_t \sim G.$$

令$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$是i.i.d.的r.v.列，对每$n\geqslant 1$，

$$P(\eta_n = -1) = P(\eta_n = 1) = 1/2.$$

记$T_n = \sum_{k=1}^{n}\eta_k, M_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} T_k, n\geqslant 1$. 据系4.4.17，为证(4.4.19)，又只需证

(4.4.20) $$M_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} G.$$

任意固定$n\geqslant 1$，随机向量$(\eta_1,\cdots,\eta_n)$只可能取$2^n$个值；$(\eta_1,\cdots,\eta_n)$的每一种取值看作一个基本事件，那么这些基本事件是等概的. 于是，$(T_1,\cdots,T_n)$的每一个取值也对应着一个基本事件. 设$a$是一个非负整数. 如果$(T_1,\cdots,T_n)$取某值$(t_1,\cdots,t_n)$使事件$\{M_n\geqslant a, T_n<a\}$发生，那么一定存在$i, 1\leqslant i<n$使$t_i=a$. 但是，基本事件

$$\{T_1 = t_1,\cdots,T_{i-1} = t_{i-1}, T_i = a, T_{i+1} = t_{i+1},\cdots,T_n = t_n\}$$

与基本事件

$$\{T_1 = t_1,\cdots,T_{i-1} = t_{i-1}, T_i = a,$$
$$T_{i+1} = a-(t_{i+1}-a),\cdots,T_n = a-(t_n-a)\}$$

之间有1—1对应的关系，而后者是有利于$\{M_n\geqslant a, T_n>a\}$发生的基本事件，故

$$\{M_n\geqslant a, T_n<a\}\subset\{M_n\geqslant a, T_n>a\}.$$

类似地可证

$$\{M_n\geqslant a, T_n>a\}\subset\{M_n\geqslant a, T_n<a\}.$$

于是我们得到如下的反射原理：

$$P(M_n\geqslant a, T_n>a) = P(M_n\geqslant a, T_n<a).$$

由此又进一步推知

$$
\begin{aligned}
& P(M_n \geqslant a) \\
= & P(M_n \geqslant a, T_n > a) + P(M_n \geqslant a, T_n = a) + P(M_n > a, T_n < a) \\
= & 2P(M_n \geqslant a, T_n > a) + P(M_n \geqslant a, T_n = a) \\
= & 2P(T_n > a) + P(T_n = a).
\end{aligned}
$$

这样，我们就得

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} P(M_n/\sqrt{n} \geqslant x) \\
= & 2\lim_{n\to\infty} P(T_n > [x\sqrt{n}]) + \lim_{n\to\infty} P(T_n = [x\sqrt{n}]) \\
= & 2[1-\Phi(x)], \quad x > 0,
\end{aligned}
$$

从而

$$
\lim_{n\to\infty} P(M_n/\sqrt{n} \leqslant x) = 1 - 2[1-\Phi(x)] = G(x).
$$

(4.4.21)得证. 证完.

纵观系 4.4.18 的证明，我们可以体会到不变原理，即定理 4.4.16的结论并不依赖于序列$\{\xi_n, n \geqslant 1\}$的共同 d.f.（只要其二阶矩存在）这一结论所带来的巨大好处. 利用它，我们可以把一般的求 i.i.d. 序列部分和泛函极限分布的问题化作特殊的 i.i.d. 序列的有关问题；利用它，我们还可以推导 Wiener 过程的连续泛函的分布. 正是因为如此，定理 4.4.16 在许多方面得到了推广. 一般地，不仅可以讨论 i.i.d. 序列的不变原理，而且可以讨论独立而不必同分布的 r.v. 序列的不变原理，甚至可以讨论相依 r.v. 序列比如鞅差序列的不变原理. 从表达式(4.4.9)我们知

$$
E[W_t^{(n)} - S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n})]^2 \to 0
$$

对每 $t \in [0,1]$成立. 因此，如果(4.4.10)成立，那么可以想象得到，也应该有

$$
\hat{W}^{(n)} := \{S_{[nt]}/(\sigma\sqrt{n}), 0 \leqslant t \leqslant 1\} \xrightarrow{d} W.
$$

但是，上式左边并不是取值于 $C[0,1]$空间的随机元. 所以这个问

题不能作为距离空间 $C[0,1]$ 的概率测度弱收敛问题来讨论而必须考虑距离空间 $D[0,1]$（$D[0,1]$ 记 $[0,1]$ 中所有右连续，有左极限的函数组成之集，在它上面也可以定义距离使之成为完备可分距离空间）上概率测度的弱收敛问题. 总之，由 Donsker 不变原理引起来的各种各样的讨论构成了概率论的一个重要内容. 有兴趣的读者可以参考书末的参考书目.

## 习 题 4.4

1. 证明由完备可分距离空间 $X$ 上的有限个概率测度组成的概率测度族是胎紧的.

2. 证明如果距离空间 $X$ 上的概率测度族 $\mathscr{M}$ 是胎紧的，那么 $\mathscr{M}$ 的任一子族也是胎紧的.

3. 证明如果距离空间 $X$ 上的概率测度族 $\mathscr{M}_1,\cdots,\mathscr{M}_k$ 都是胎紧的，则 $\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{M}_i$ 也是胎紧的.

4. 概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 之可测集 $A\in\mathscr{F}$ 称为 $P$ 的支撑(support)，如果它满足 $P(A)=1$. 一个距离空间 $(X,\rho)$ 之一子集称为是 $\sigma$ 紧的，如果它可以表为 $X$ 中可数个紧集之并. 证明：如果距离空间 $(X,\rho)$ 上的概率测度族 $\mathscr{M}$ 是胎紧的，则 $\mathscr{M}$ 的所有概率测度有一个共同的 $\sigma$ 紧支撑. 举例说明即使距离空间 $(X,\rho)$ 上的概率测度族 $\mathscr{M}$ 有一个共同的 $\sigma$ 紧支撑，它也未必是胎紧的.

5. 证明：如果 $f$ 是距离空间 $X$ 到 $Y$ 的连续映射，$\mathscr{M}$ 是 $X$ 上相对紧的概率测度族，则

$$\mathscr{M}f^{-1}=\{\mu f^{-1}:\mu\in\mathscr{M}\}$$

是 $Y$ 上相对紧的概率测度族.

6. 证明：$\boldsymbol{R}$ 中的正态 d. f. 族 $\left\{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right):\mu\in A,\sigma\in D\right\}$ 是胎紧的当且仅当 $A$ 和 $D$ 分别是 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}^+=(0,\infty)$ 中之有界集.

7. 距离空间$(X,\rho)$上的有限测度列$\{\mu_n\}$称为相对紧的，如对$\{n\}$的每一子列$\{n'\}$，存在$\{n'\}$的子列$\{n''\}$和$X$上的有限测度$\mu$，使$\mu_{n''}\xrightarrow{w}\mu$. 证明：如$X$是完备可分的，则$\{\mu_n\}$相对紧的充要条件是下列两项同时成立：

(1) $\{\mu_n\}$有界，即$\sup\limits_{n\geq 1}\mu_n(X)<\infty$；

(2) $\{\mu_n\}$胎紧，即对任给$\epsilon>0$，存在$X$的紧子集$K$使$\sup\limits_{n\geq 1}\mu_n(K^c)<\epsilon$.

8. 设$\{\mu_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是$\boldsymbol{R}$上的概率测度族，$\{F_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$和$\{f_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$分别是对应的 d. f. 族和 c. f. 族. 证明下列命题等价：

(1) $\{\mu_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$胎紧；

(2) $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}[F_\lambda(-m)+1-F_\lambda(m)]=0$；

(3) $\lim\limits_{t\to 0}\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Re}[1-f_\lambda(t)]=0$.

9. 证明：如果 r. v. 族$\{\xi_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$一致可积，那么它一定是胎紧的.

10. 证明$n$维随机向量族$\{\xi_\lambda=(\xi_{1,\lambda},\cdots,\xi_{n,\lambda}),\lambda\in\Lambda\}$是胎紧的当且仅当对每$i=1,\cdots,n$，r. v. 族$\{\xi_{i,\lambda},\lambda\in\Lambda\}$是胎紧的.

11. r. v. 列$\{\xi_n,n\geq 1\}$称为是依概率相对紧，如果对$\{n\}$的任一子列$\{n'\}$，存在$\{n'\}$的子列$\{n''\}$和实数$a$，使$\xi_{n''}\xrightarrow{P}a$. 证明$\{\xi_n,n\geq 1\}$依概率相对紧当且仅当$\{\xi_n,n\geq 1\}$是胎紧的并且

$$\lim_{n\to\infty}|E\exp(\mathrm{i}t\xi_n)|=1,\quad t\in R.$$

12. 设独立 r. v. 阵列$\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geq 1\}$满足条件

$$\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{k_n}E\xi_{n,k}^2<\infty.$$

证明$\left\{\sum\limits_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k},n\geq 1\right\}$是胎紧的.

13. 设 r. v. 阵列$\{\xi_{n,k},1\leqslant k\leqslant k_n,n\geq 1\}$满足条件：

(1) $k_n \to \infty$;

(2) 对每 $n \geqslant 1, \xi_{n,1}, \cdots, \xi_{n,k_n}$ 独立同分布.

证明:如果 $\left\{ \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}, n \geqslant 1 \right\}$ 是胎紧的,则

$$\xi_{n,1} \xrightarrow{P} 0.$$

14. 设$\{\xi_n, n \geqslant 1\}$是任一 r. v. 序列,记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, n \geqslant 1$. 对任一 $\sigma \in (0, \infty)$,定义 $W^{(n)} = \{W_t^{(n)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 如(4.4.9). 证明如对每 $\varepsilon > 0$,存在 $\lambda > 1$ 和 $n_0$ 使当 $n \geqslant n_0$ 时

$$P(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_{k+i} - S_k| \geqslant \lambda \sigma \sqrt{n}) \leqslant \varepsilon / \lambda^2$$

对一切 $k \geqslant 1$ 成立,则$\{W^{(n)}, n \geqslant 1\}$胎紧.

15. 设$\{\xi_{n,k}, 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$是独立 r. v. 阵列,$E\xi_{n,k} = 0, E\xi_{n,k}^2 = \sigma_{n,k}^2 > 0$. 令

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} \xi_{n,i},$$

$$\Sigma_{n,k}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_{n,i}^2,$$

$$W_t^{(n)} = \frac{1}{\Sigma_{n,k_n}} \left( S_{n,k} + \frac{t\Sigma_{n,k_n}^2 - \Sigma_{n,k}^2}{\Sigma_{n,k+1}^2 - \Sigma_{n,k}^2} \xi_{n,k+1} \right), \frac{\Sigma_{n,k}^2}{\Sigma_{n,k_n}^2} \leqslant t \leqslant \frac{\Sigma_{n,k+1}^2}{\Sigma_{n,k_n}^2}.$$

证明:如 Lindeberg 条件满足,则

$$W^{(n)} \xrightarrow{d} W.$$

16. 对任一 r. v. $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$,通过(4.4.9)定义 $W^{(n)} = \{W_t^{(n)}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 证明:如

$$W^{(n)} \xrightarrow{w} W,$$

则对任给 $\varepsilon > 0$,存在 $\lambda > 0$ 使

$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \lambda \sigma \sqrt{n}) \leqslant \varepsilon / \lambda^2$$

对充分大的 $n$ 成立.

17. 设$\{\xi_n,n\geqslant1\}$i.i.d.,对每 $n\geqslant1$,以 $\xi_{n,1}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{n,n}$记 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的次序统计量并约定 $\xi_{n,0}=-\infty$和 $\xi_{n,n+1}=\infty$. 对每 $k=0,1,\cdots,n$,令

$$F_n(x)=k/n,\quad x\in[\xi_{n,k},\xi_{n,k+1}).$$

$F_n$ 称为经验 d.f.. 证明:如$\{\xi_n,n\geqslant1\}$是$[0,1]$上均匀分布的,则

$$\sqrt{n}\sup_{0\leqslant t\leqslant1}|F_n(t)-t|\xrightarrow{d}\sup_{0\leqslant t\leqslant1}|B_t|,$$

这里$\{B_t,0\leqslant t\leqslant1\}$是 Brown 桥.

提示:如$\{\xi_n,n\geqslant1\}$是$[0,1]$上均匀分布的 i.i.d. 序列,$\{S_n,n\geqslant1\}$是 i.i.d. 标准指数分布的部分和序列,则

$$(\xi_{n,1},\cdots,\xi_{n,n})\stackrel{d}{=}(S_1/S_{n+1},\cdots,S_n/S_{n+1}),$$

因而

$$\sqrt{n}\sup_{0\leqslant t\leqslant1}|F_n(t)-t|\stackrel{d}{=}\frac{n}{S_{n+1}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\frac{S_k-k}{\sqrt{n}}-\frac{k}{n}\,\frac{S_{n+1}-n}{\sqrt{n}}\right|.$$

18. 设$\{\xi_n,n\geqslant1\}$i.i.d,其共同 d.f. $F$ 连续,以 $F_n$ 记其经验 d.f.. 证明

$$\sqrt{n}\sup_{x\in R}|F_n(x)-F(x)|\xrightarrow{d}\sup_{x\in R}|B_{F(x)}|,$$

其中$\{B_t,0\leqslant t\leqslant1\}$是 Brown 桥.

提示:因为 $F$ 连续,故$\{F(\xi_n),n\geqslant1\}$i.i.d.,在$[0,1]$上均匀分布.

# 第五章 强收敛理论

我们把随机变量序列 a.s. 收敛的理论称为强收敛理论. 这主要包括随机变量级数的收敛性、强大数定律、重对数律和强不变原理. 正如我们在第四章所看到的,随机元的依分布收敛从纯数学的角度看,是一种随机元取值的距离空间中概率测度的弱收敛,本质上不是在随机元赖以定义的基础概率空间考虑问题. a.s. 收敛则不同,它是随机变量序列自身在基础概率空间的收敛性质. 因此,无论从理论和应用的角度看,强收敛的问题都是十分重要的.

尽管从 17 世纪中叶概率论开始形成以来就伴随着对大数律的讨论,但是对于强大数律的第一个明确的结果在 1909 年才由 Borel 得到. 本世纪的 20—30 年代,Kolmogorov 证明了关于独立 r.v. 的三级数定理和他的两个强大数律. 1924 年,Khintchine 为了研究大数律的收敛速度,首次对 Bernoulli 序列证明了重对数律. 他的结果后来被 Kolmogorov(1929)和 Hartman-Wintner(1941)所推广. 这些早期的结果后来在两个方面得到发展:1964 年 Strassen 加强了重对数律的结论,得到了它的不变原理;此外,60 年代以来,随着一系列关于鞅的不等式的发现,不少关于独立和的结果被推广到鞅上去. 目前,关于随机变量序列的强收敛内容已十分丰富,我们只能选择其中的一部分加以介绍.

# 第一节　随机变量级数的收敛性

## 1.1　非负随机变量级数

我们以Chen(1978)的下列定理为讨论出发点：

**定理 5.1.1**　设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的非负可测函数列，$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$域列. 则下列命题成立：

(1) 如$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$非降，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n<\infty \text{ a.s. } \Big\{\sum_{n=1}^{\infty}E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\Big\}; \tag{5.1.1}$$

(2) 如$\sigma\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big)\subset\mathscr{F}_n,n\geqslant 1$且$E\sup\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\xi_n}{1+\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k}<\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1})<\infty \text{ a.s. } \Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n<\infty\Big\}. \tag{5.1.2}$$

**证明**　对每$n\geqslant 1$，记$\eta_n=E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1})$. 易见当$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$非降时

$$E\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k}{\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k\Big)^2}I_{\{\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k<\infty\}}\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{\Big(1+\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big)^2}I_{\{\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k<\infty\}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}EE\left[\frac{\xi_n}{\Big(1+\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big)^2}I_{\{\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k<\infty\}}\,\Bigg|\,\mathscr{F}_{n-1}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E\frac{\eta_n}{\Big(1+\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Big)^2}I_{\{\sum_{k=1}^{n}\eta_k<\infty\}}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E \frac{\eta_n}{\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n}\eta_k\right)} I_{\left\{\sum_{k=1}^{n}\eta_k<\infty\right\}}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n-1}\eta_k}-\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n}\eta_k}\right)$$

$$=1-E\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k}\leqslant 1.$$

因此

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n}{\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\right)^2}<\infty \text{ a.s. } \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n<\infty\right\},$$

并由此推出(5.1.1). 命题(1)得证.

在命题(2)之条件下,我们有

$$E\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n}{\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\right)^2} I_{\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n<\infty\right\}}$$

$$\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n}{\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\right)^2} I_{\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k<\infty\right\}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} E\frac{E(\xi_n\mid\mathscr{F}_{n-1})}{\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\right)^2} I_{\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k<\infty\right\}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} E\frac{\xi_n}{\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\right)^2} I_{\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k<\infty\right\}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E \frac{\xi_n}{\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)} \left[1+\frac{\xi_n}{1+\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k}\right] I_{\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k<\infty\right\}}$$

$$\leqslant 1 + E \sup_{n\geqslant 1} \frac{\xi_n}{1+\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k} < \infty.$$

因此又有

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n}{\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\right)^2} < \infty \text{ a.s. } \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n < \infty\right\},$$

即(5.1.2)成立.证完.

作为定理 5.1.1 的推论,我们得到如下的条件 Borel-Cantelli 引理.

**系 5.1.2** 设$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的非降子$\sigma$域,对每$n\geqslant 1$,$A_n\in\mathscr{F}_n$.则

$$(5.1.4) \quad \{A_n, \text{i.o.}\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \infty\right\} \text{ a.s.};$$

$$(5.1.5) \quad \{A_n, \text{f.o.}\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty\right\} \text{ a.s.}.$$

**证明** 对每$n\geqslant 1$,令$\xi_n = I_{A_n}$,则

$$E(\xi_n|\mathscr{F}_{n-1}) = P(A_n|\mathscr{F}_{n-1}).$$

又注意

$$\{A_n, \text{f.o.}\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n < \infty\right\},$$

由定理 5.1.1 之命题(1)立得

$$\{A_n, \text{f.o.}\} \text{ a.s. } \left\{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty\right\}.$$

容易验证上述$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$亦满足定理 4.1.1 命题(2)之条件,故由

(4.1.2)又得

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\right\}\ \text{a.s.}\ \{A_n,\text{f.o.}\}.$$

于是(5.1.5)成立. 但(5.1.4)与(5.1.5)等价,故(5.1.4)亦成立. 证完.

### 1.2 鞅差和适随机变量级数

在第二章第三节,我们讨论过下鞅和鞅的收敛定理. 鞅的收敛显然等价于对应的鞅差序列级数的收敛. 因此,这一小节的内容和前面是有联系的. 不过在这里我们将不满足于仅仅给出鞅差级数 a.s. 收敛的条件,而是想搞清楚它在哪些集合上是收敛的——因为对于一般的 r.v. 列$\{\xi_k,k\geqslant1\}$而言,级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 完全可能在一个正测集上收敛,在另一个正测集上发散. 我们先从一个鞅差级数收敛的命题开始讨论. 对于概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$的子 $\sigma$ 域列$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$,我们将以 $\mathscr{F}_0$ 记被 $\mathscr{F}_1$ 包含的任一子 $\sigma$ 域.

**命题 5.1.3** 如$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$是鞅差序列,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\ \text{收敛 a.s.}\ \left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}. \tag{5.1.6}$$

**证明** 对任给 $C>0$,令

$$\tau=\inf\left\{n\geqslant1:\sum_{k=1}^{n+1}E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})>C\right\}$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$). 易见 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$的停时,从而

$$\left\{\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k=\sum_{k=1}^{n}\xi_kI_{\{\tau\geqslant k\}},\mathscr{F}_{\tau\wedge n},n\geqslant1\right\}$$

是一个鞅,且

$$\begin{aligned}E\xi_k^2I_{\{\tau\geqslant k\}}&=EE(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})I_{\{\tau\geqslant k\}}\\&\leqslant E\left[\sum_{i=1}^{k}E(\xi_i^2|\mathscr{F}_{i-1})\right]I_{\{\tau\geqslant k\}}\leqslant C\end{aligned}$$

对每 $k\geqslant 1$ 成立，我们知它是 $L_2$ 鞅. 因此，由命题 2.1.8、引理 2.2.12和引理 2.2.13 推知

$$\begin{aligned}E\Big(\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k\Big)^2&=E\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k I_{\{\tau\geqslant k\}}\Big)^2=E\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 I_{\{\tau\geqslant k\}}=E\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k^2\\&=E\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}E(\xi_k^2\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\\&=E\sum_{k=1}^{\tau}E(\xi_k^2\,|\,\mathscr{F}_{k-1})I_{\{\tau\leqslant n\}}+E\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k^2\,|\,\mathscr{F}_{k-1})I_{\{\tau>n\}}\\&\leqslant C\end{aligned}$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立. 由此可见，

$$\sup_{n\geqslant 1}E\Big|\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k\Big|\leqslant\sup_{n\geqslant 1}E^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k\Big)^2\leqslant C.$$

根据下鞅基本收敛定理，这意味着 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\tau\wedge n}\xi_k$ a.s. 存在亦即

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k I_{\{\tau\geqslant k\}}\ \text{a.s. 收敛}.$$

注意在集 $\Big\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\leqslant C\Big\}=\{\tau=\infty\}$ 上，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k I_{\{\tau\geqslant k\}}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k$，故我们进而得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\ \text{收敛 a.s.}\ \Big\{\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\leqslant C\Big\}.$$

但上式中 $C$ 是任意的，故再应用命题 2.2.8 的(4)，即得(5.1.6). 命题证完.

利用条件 Borel-Cantelli 引理和命题 5.1.3，我们有如下关于适 r.v. 级数收敛的定理；通常，人们称它为条件三级数定理.

**定理 5.1.4** 设$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$是适 r.v. 序列，$C$ 是一个正常数. 令

$$A_1=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k|>C|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\},$$

$$A_2=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})\text{ 收敛}\right\},$$

$$A_3=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{var}(\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}$$

以及 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\text{ 收敛 a.s. }A. \tag{5.1.7}$$

**证明** 对鞅差序列

$$\{\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}-E(\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1}),\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$$

用命题 5.1.3 立得

$$\sum_{k=1}^{\infty}[\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}-E(\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})]\text{ 收敛 a.s. }A_3.$$

由此又得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}\text{ 收敛 a.s. }A_2\cap A_3. \tag{5.1.8}$$

此外，显然有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_kI_{\{|\xi_k|>C\}}\text{ 收敛 a.s. }\{|\xi_k|>C,\text{f.o.}\}.$$

但由系 5.1.2 知

$$\{|\xi_n|>C,\text{f.o.}\}=A_1\text{ a.s.},$$

故上式意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_kI_{\{|\xi_k|>C\}}\text{ 收敛 a.s. }A_1\text{ a.s.},$$

把此式与(5.1.8)合并，利用命题 2.2.8 即得(5.1.7). 证完.

由定理 5.1.4 又可以得到如下结论.

**系 5.1.5** 如$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$是适 r.v. 列，$p\in(0,1]$. 则

(5.1.9) $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 收敛 a.s. $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}$.

**证明** 据命题 2.2.8 和定理 5.1.4，只需对某个 $C>0$，证明对定理 5.1.4 中定义的 $A_i$，有

(5.1.10) $A_i$ a.s. $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}$, $i=1,2,3$.

因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k|>C|\mathscr{F}_{k-1})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi|^p|\mathscr{F}_{k-1})/C^p<\infty \text{ a.s.},$$

所以(5.1.10)当 $i=1$ 时成立. 因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}|E(\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})$$

$$\leqslant C^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty \text{ a.s.},$$

所以(5.1.10)当 $i=2$ 时成立. 又因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{var}(\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2 I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})$$

$$\leqslant C^{2-p}\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty \text{ a.s.},$$

所以(5.1.10)当 $i=3$ 成立. 证完.

下面，我们回过头来讨论鞅差级数的收敛性. 命题 5.1.3 被推广为

**定理 5.1.6** 设 $\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$ 是鞅差序列. 下列两命题成立：

(1) 如 $0<p\leqslant2$，则(5.1.9)成立；

(2) 如 $p>2$，则对任一满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$$

的正实数列 $\{a_k,k\geqslant1\}$ 有

$$(5.1.11)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛 a.s.}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{1-2/p}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

**证明** 当 $0<p\leqslant 1$ 时，由系 5.1.5 知(5.1.9)成立. 当 $1<p\leqslant 2$ 时，采用证明系 5.1.5 的类似方法来验证(5.1.10). 当 $i=1$ 和 $i=3$，其验证方法与系 5.1.5 雷同，略. 当 $i=2$ 时，利用鞅差性质可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|E(\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}|\mathscr{F}_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{\infty}|E(\xi_k I_{\{|\xi_k|>C\}}|\mathscr{F}_{k-1})| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|I_{\{|\xi_k|>C\}}|\mathscr{F}_{k-1}) \\ &\leqslant C^{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty,\end{aligned}$$

因而(5.1.10)成立，命题(1)得证.

为证命题(2)，对每 $k\geqslant 1$，当 $p>2$ 时，

$$\begin{aligned}E^{2/p}(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1}) &= E^{2/p}(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})I_{\{E^{2/p}(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})\leqslant a_k\}} \\ &\quad + E^{2/p}(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})I_{\{E^{2/p}(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})>a_k\}} \\ &\leqslant a_k + a_k^{1-2/p}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1}),\end{aligned}$$

故由 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$ 推知

$$\sum_{k=1}^{\infty}E^{2/p}(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty \text{ a.s.}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{1-2/p}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

但是，利用条件不等式知对每 $k\geqslant 1$，

$$E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})\leqslant E^{2/p}(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1}) \text{ a.s.},$$

故进而得

$$\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})<\infty \text{ a.s.}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{1-2/p}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

上式再与(5.1.6)结合，即由命题 2.2.8 推出(5.1.11). 证完.

## 1.3 鞅差级数的收敛集合

上一小节我们讨论了在什么样的集合上，鞅差级数和适 r.v. 级数是收敛的. 在那里，我们并没有对鞅差序列或适 r.v. 序列加什么条件. 本小节我们将在某些条件下，把鞅差级数的收敛集合找出来. 为了叙述简洁，我们将把鞅差序列$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$对应的鞅序列记作$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$，即对每 $n\geqslant 1$，令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$.

**定理 5.1.7** 如鞅差序列$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$满足

$$E\sup_{k\geqslant 1}\xi_k^2<\infty, \tag{5.1.12}$$

则

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\text{ 收敛}\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2<\infty\right\}\ \text{a.s.}. \tag{5.1.13}$$

**证明** 由定理 5.1.1 知(5.1.13)之第二个等号成立. 由命题 5.1.3 又有(5.1.6). 因此为证(5.1.13)，只需在(5.1.12)之下证明

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}\ \text{a.s.}\ \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\text{ 收敛}\right\}. \tag{5.1.14}$$

对任给 $C>0$，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant 1:|S_n|>C\}$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$). 易见 $\tau$ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$的停时，故

$$E\left[\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})\right]I_{\{\tau=\infty\}}\leqslant E\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2|\mathscr{F}_{k-1})I_{\{\tau\geqslant k\}}$$

$$=E\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2I_{\{\tau\geqslant k\}}=\lim_{n\to\infty}E\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2I_{\{\tau\geqslant k\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k I_{\{\tau\geq k\}}\Big)^2 = \lim_{n\to\infty} ES^2_{\tau\wedge n}$$

$$\leqslant 2\lim_{n\to\infty}(ES^2_{\tau\wedge n-1} + E\xi^2_{\tau\wedge n})$$

$$\leqslant 2(C^2 + E\sup_{k\geqslant 1}\xi_k^2) < \infty.$$

这表明

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(\xi_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}) < \infty \text{ a. s. } \{\tau = \infty\} = \{\sup_{n\geqslant 1}|S_n| \leqslant C\}.$$

但上式中 $C$ 是任意的，故

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(\xi_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}) < \infty \text{ a. s. } \{\sup_{n\geqslant 1}|S_n| < \infty\}.$$

注意 $\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 收敛$\Big\}\subset\{\sup_{n\geqslant 1}|S_n| < \infty\}$，我们知上式蕴含(5.1.14)．证完．

我们将谋求在比(5.1.12)更弱的条件

$$E\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k| < \infty \tag{5.1.15}$$

之下描述鞅差级数的收敛集合．

**引理 5.1.8** 如鞅差序列$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$满足

$$\sup_{n\geqslant 1}E|S_n| < \infty \tag{5.1.16}$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2 < \infty, \text{ a. s.}. \tag{5.1.17}$$

**证明** 对任 $C>0$，令

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1: |S_n| > C\}$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$)．由于$\{|S_n|,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是一个非负下鞅，利用引理 2.4.4 之(2.4.8)式和条件(5.1.16)可得

$$E\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\Big)I_{\{\tau=\infty\}} = E\Big(\sum_{k=1}^{\tau-1}\xi_k^2\Big)I_{\{\tau=\infty\}} \leqslant E\sum_{k=1}^{\tau-1}\xi_k^2 \leqslant 2C\sup_{n\geqslant 1}E|S_n| < \infty.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{(\infty)}\xi_k^2 < \infty \text{ a.s. } \{\tau=\infty\} = \{\sup_{n\geq 1}|S_n| \leqslant C\}.$$

由于上式中 $C$ 是任意的，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_k^2 < \infty \text{ a.s. } \{\sup_{n\geq 1}|S_n| < \infty\}.$$

但由定理 2.3.4，在条件(5.1.16)之下，$S_n$ 当 $n\to\infty$ 时 a.s. 有有限极限，故 $P(\sup_{n\geq 1}|S_n|<\infty)=1$，故上式表明(5.1.17)成立. 证完.

**引理 5.1.9** 设适 r.v. 列 $\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是一个下鞅，令 $\xi_1=S_1$，又对每 $k>1$，$\xi_k=S_k-S_{k-1}$. 如果

$$E\sup_{k\geqslant 1}\xi_k^+ < \infty, \tag{5.1.18}$$

则

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛}\right\} = \{\sup_{n\geqslant 1}S_n < \infty\} \text{ a.s.}. \tag{5.1.19}$$

**证明** 显然有

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛}\right\} \subset \{\sup_{n\geqslant 1}S_n < \infty\}.$$

因此只需证

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛 a.s. } \{\sup_{n\geqslant 1}S_n^+ < \infty\}. \tag{5.1.20}$$

对任给 $C>0$，定义 $\{\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 的停时

$$\tau = \inf\{n\geqslant 1: S_n > C\}$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$)，则 $\{S_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 还是下鞅且

$$\begin{aligned} S_{\tau\wedge n} &= S_\tau I_{\{\tau\leqslant n\}} + S_n I_{\{\tau>n\}} \leqslant (S_{\tau-1}+\xi_\tau)I_{\{\tau\leqslant n\}} + CI_{\{\tau>n\}} \\ &\leqslant C + \sup_{k\geqslant 1}\xi_k^+. \end{aligned}$$

由此可见

$$\sup_{n\geqslant 1}ES_{\tau\wedge n}^+ \leqslant C + E\sup_{k\geqslant 1}\xi_k^+ < \infty.$$

于是由下鞅基本收敛定理推得

$$\lim_{n\to\infty}S_{\tau\wedge n} \quad \text{a.s. 存在有限}.$$

这样当然就更有

$$\lim_{n\to\infty} S_n I_{\{\tau=\infty\}} = \lim_{n\to\infty} S_{\tau\wedge n} I_{\{\tau=\infty\}} \text{ a. s. 存在有限.}$$

这表明

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ 收敛 a. s. } \{\tau = \infty\} = \{\sup_{n\geqslant 1} S_n \leqslant C\}.$$

再利用 $C$ 的任意性即得(5.1.20). 证完.

**定理 5.1.10** 如鞅差序列 $\{\xi_k, \mathscr{F}_k, k\geqslant 1\}$ 满足条件(5.1.15), 则

$$(5.1.21) \quad \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ 收敛}\right\} = \{\sup_{n\geqslant 1} S_n < \infty\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < \infty\right\} \text{ a.s.}.$$

**证明** 由引理 5.1.9 知(5.1.21)之前一个等式成立. 因此只需再证

$$(5.1.22) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < \infty \text{ a. s. } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ 收敛}\right\};$$

$$(5.1.23) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ 收敛 a. s. } \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < \infty\right\}.$$

为证(5.1.22), 对任给 $C>0$, 定义停时

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1 : |S_n| > C\}$$

(约定 $\inf\varnothing = \infty$). 不难见

$$|S_{\tau\wedge n}| \leqslant (|S_{\tau-1}| + |\xi_\tau|) I_{\{\tau\leqslant n\}} + |S_n| I_{\{\tau>n\}} \leqslant C + \sup_{k\geqslant 1} |\xi_k|,$$

从而由(5.1.15)得

$$\sup_{n\geqslant 1} E\left|\sum_{n=1}^{n} \xi_k I_{\{\tau\geqslant k\}}\right| = \sup_{n\geqslant 1} E|S_{\tau\wedge n}| \leqslant C + E\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k| < \infty.$$

对鞅差列 $\{\xi_k I_{\{\tau\geqslant k\}}, \mathscr{F}_k, k\geqslant 1\}$ 用引理 5.1.8, 我们得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 I_{\{\tau=\infty\}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 I_{\{\tau\geqslant k\}} < \infty \quad \text{a.s.}.$$

于是, 由 $C$ 的任意性推知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < \infty \quad \text{a. s. } \{\sup_{n\geqslant 1} |S_n| < \infty\},$$

再注意 $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛}\right\}\subset\{\sup_{n\geqslant 1}|S_n|<\infty\}$ 即得(5.1.22).

为证(5.1.23),对任 $C>0$ 定义停时

$$\sigma=\inf\left\{n\geqslant 1:\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2>C^2\right\}$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$)并考虑鞅差序列 $\{\xi_k^{(i)},\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$,$i=1,2$,其中

$$\xi_k^{(1)}=\xi_k I_{\{\sigma=k\}}-E(\xi_k I_{\{\sigma=k\}}|\mathscr{F}_{k-1}),k\geqslant 1;$$

$$\xi_k^{(2)}=\xi_k I_{\{\sigma>k\}}-E(\xi_k I_{\{\sigma>k\}}|\mathscr{F}_{k-1}),k\geqslant 1.$$

由于

$$E\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(1)}|\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_k|I_{\{\sigma=k\}}=2E|\xi_\sigma|I_{\{\sigma<\infty\}}\leqslant 2E\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k|<\infty,$$

我们得 $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(1)}|<\infty$ a.s.,从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(1)} \text{ 收敛}\quad \text{a.s.}. \tag{5.1.24}$$

又由于对每 $n\geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 I_{\{\sigma>k\}}=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 I_{\{\sigma\geqslant k\}}-\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 I_{\{\sigma=k\}}=\sum_{k=1}^{\sigma\wedge n}\xi_k^2-\xi_\sigma^2 I_{\{\sigma\leqslant n\}}$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\sigma\wedge n-1}\xi_k^2+\xi_{\sigma\wedge n}^2 I_{\{\sigma>n\}}\leqslant 2C^2,$$

我们得

$$E\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k^{(2)})^2\leqslant 2\lim_{n\to\infty}E\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 I_{\{\sigma>k\}}\leqslant 4C^2.$$

由此可见

$$E\sup_{k\geqslant 1}(\xi_k^{(2)})^2\leqslant 4C^2<\infty;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k^{(2)})^2<\infty\quad \text{a.s.}.$$

于是,把定理 5.1.7 用于 $\{\xi_k^{(2)},\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^{(2)} \text{ 收敛} \quad \text{a.s.}.$$

上式与(5.1.24)一起给出

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k I_{\{\sigma\geqslant k\}} \text{ 收敛} \quad \text{a.s.},$$

因而进一步得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛 a.s. } \{\sigma=\infty\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\leqslant C^2\right\}.$$

但上式之 $C$ 任意，故(5.1.23)成立. 证完.

设 $\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 是鞅差列，$\{\eta_k,\mathscr{F}_{k-1},k\geqslant 1\}$ 是适可测函数列. 那么在适当的条件下，$\{\xi_k\eta_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 还是鞅差序列. 作为定理5.1.7和定理 5.1.10 的应用，我们将得到关于级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$ 收敛性的如下结论.

**定理 5.1.11** 设 $\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 是鞅差序列，$\{\eta_k,\mathscr{F}_{k-1},k\geqslant 1\}$ 是适可测函数列. 则在条件(5.1.16)下，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k \text{ 收敛 a.s. } \{\sup_{k\geqslant 1}|\eta_k|<\infty\}. \tag{5.1.25}$$

**证明** 任给 $C>0$，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant 1:|S_n|>C\}(\text{约定 }\inf\varnothing=\infty);$$
$$\zeta_k=\xi_k I_{\{\tau\geqslant k\}}\cdot\eta_k I_{\{|\eta_k|\leqslant C\}},k\geqslant 1.$$

易见 $\tau$ 是 $\{\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 的停时而 $\{\zeta_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$ 是鞅差序列. 注意对每 $k\geqslant 1$，

$$\begin{aligned}|\zeta_k|&\leqslant C|\xi_k|I_{\{\tau\geqslant k\}}=C(|\xi_\tau|I_{\{\tau=k\}}+|\xi_k|I_{\{\tau>k\}})\\&\leqslant C(|S_{\tau-1}|+|S_\tau|)I_{\{\tau=k\}}-C(|S_{k-1}|+|S_k|)I_{\{\tau>k\}}\\&\leqslant C(C+|S_\tau|)I_{\{\tau=k\}}+2C^2I_{\{\tau>k\}}\\&\leqslant C|S_\tau|+2C^2,\end{aligned}$$

由引理 2.4.3 之(2.4.6)式便得

$$E\sup_{k\geq 1}|\zeta_k| \leqslant CE|S_\tau| + 2C^2 \leqslant C\sup_{n\geq 1}E|S_n| + 2C^2 < \infty;$$

于是用定理 5.1.10 于$\{\zeta_k, \mathscr{F}_k, k\geq 1\}$，知

$$(5.1.26)\qquad \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k \text{ 收敛}\right\} = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k^2 < \infty\right\} \quad \text{a.s.}.$$

由于$|\zeta_k| \leqslant C|\xi_k|, k\geq 1$，故

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2 < \infty\right\} \subset \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k^2 < \infty\right\}.$$

但引理 5.1.8 表明此时(5.1.17)成立，故(5.1.26)实际上意味着

$$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_k \text{ 收敛} \quad \text{a.s.}.$$

注意在集合$\{\sup_{n\geq 1}|S_n| \leqslant C, \sup_{k\geq 1}|\eta_k| \leqslant C\}$上，$\zeta_k = \xi_k\eta_k$ 对每 $k\geq 1$ 成立，上式进而给出

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k \text{ 收敛} \quad \text{a.s.}\ \{\sup_{n\geq 1}|S_n| \leqslant C, \sup_{k\geq 1}|\eta_k| \leqslant C\}.$$

于是由 $C$ 的任意性推得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k \text{ 收敛} \quad \text{a.s.}\ \{\sup_{n\geq 1}|S_n| < \infty, \sup_{k\geq 1}|\eta_k| < \infty\}.$$

由下鞅基本定理和条件(5.1.16)不难见

$$P(\sup_{n\geq 1}|S_n| < \infty) = 1,$$

所以上面得到的那个式子也就是(5.1.25). 证完.

### 1.4 独立 r.v. 序列的零一律

从前面的那些讨论可以看出，一般 r.v. 级数的收敛性还是比较复杂的，其主要原因是由于它可能在一个正测度集上收敛而同时又在一个正测度上不收敛，使得我们在描述收敛集上花了很大的力气. 这种现象对独立 r.v. 的级数将不再存在，因为像$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛}\right\}$这类集合的概率当$\{\xi_k, k\geq 1\}$独立时非 0 即 1，即符

合独立 r. v. 序列的零一律. 下面,我们就对此作进一步的说明.

**定义 5.1.1** 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机元序列. 记$\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_k,k\geqslant n)$, $n\geqslant 1$. 我们称$\mathscr{J}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{J}_n$为$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的尾$\sigma$域, $\mathscr{J}$中的事件为尾事件, $\mathscr{J}$可测的函数为尾函数.

不难验证,集合$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛}\right\}$是 r. v. 序列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的一个尾事件. 关于独立 r. v. 列的尾事件和尾函数,我们有如下的重要事实—— Kolmogorov 零一律.

**定理 5.1.12** 独立 r. v. 序列尾事件的概率非 0 即 1;独立 r. v. 序列的尾函数 a. s. 是一个常数(这里我们把$\infty$和$-\infty$也看成是一个"数").

**证明** 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是独立 r. v. 序列,对每$n\geqslant 1$,记$\mathscr{F}_n=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_n)$. 如$\eta$是$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的有界尾函数,则$\eta$关于$\mathscr{F}_\infty=\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n\right)$可测而且对每$n\geqslant 1$, $\eta$与$\mathscr{F}_n$独立,因而由定理 2.3.12 得

$$\eta=E(\eta|\mathscr{F}_\infty)=\lim_{n\to\infty}E(\eta|\mathscr{F}_n)=E\eta \quad \text{a.s.}.$$

可见$\eta$ a. s. 是一个常数. 如$\eta$是$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的非负尾函数,对每$n\geqslant 1$,令$\eta_n=\eta\wedge n$,则由单调收敛定理和上面已对有界尾函数证明之结论得

$$\eta=\lim_{n\to\infty}\eta_n=\lim_{n\to\infty}E\eta_n=E\eta \quad \text{a.s.},$$

可见$\eta$仍 a. s. 是一个常数. 如$\eta$是一般的尾函数,则当$E\eta^+=\infty$时$\eta=\eta^+=\infty$ a. s.;当$E\eta^-=-\infty$时$\eta=-\eta^-=-\infty$ a. s.;当$E|\eta|<\infty$时

$$\eta=\eta^+-\eta^-=E\eta^+-E\eta^-=E\eta \quad \text{a.s.},$$

说明$\eta$还 a. s. 是一个常数. 这样,我们就证明了定理的第二个结论.

以 $\mathscr{J}$ 记$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的尾 $\sigma$ 域. 如 $A\in\mathscr{J}$,把已经获证之定理的第二个结论用于尾函数 $\eta=I_A$,我们得

$$I_A = EI_A = P(A) \quad \text{a.s.}.$$

这说明 $P(A)$非 0 即 1,因此定理的第一个结论又得证. 证完.

不难看出,如果$\{A_n,n\geqslant 1\}$是独立的事件序列,那么事件$\{A_n, \text{i.o.}\}$是独立 r. v. 序列$\{I_{A_n},n\geqslant 1\}$的尾事件. 因此 $P(A_n,\text{i.o.})$非 0 即 1. 这说明前面讲过的 Borel-Cantelli 引理也是 Kolmogorov 零一律的一种表现.

**定义 5.1.2** 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到可测空间$(X,\mathscr{B})$的随机元序列. $\mathscr{F}$ 中的事件 $A$ 称为是对称的,如果存在 $B\in\mathscr{B}^\infty$,使对每一个 $n\geqslant 1$ 和$\{1,\cdots,n\}$的每一个重排$(i_1,\cdots,i_n)$,均有

$$\begin{aligned} A &= \{(\xi_1,\cdots,\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)\in B\} \\ &= \{(\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_n},\xi_{n+1},\cdots)\in B\} \quad \text{a.s.}. \end{aligned}$$

容易证明:随机元列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的对称事件的全体形成一个 $\sigma$ 域;随机元列的尾事件必是对称事件,而它的对称事件未必是尾事件. 因此,下列 Hewitt-Savage 零一律在$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是 i. i. d. 的 r. v. 列的特殊情况下加强了 Kolmogorov 零一律.

**定理 5.1.13** 如随机元序列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$i. i. d. ,则其对称事件的概率非 0 即 1.

**证明** 设 $A$ 是$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的对称事件. 由定义知存在 $B\in\mathscr{B}^\infty$ 使对每 $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned} (5.1.27)\quad A &= \{(\xi_1,\cdots,\xi_n;\xi_{n+1},\cdots,\xi_{2n};\xi_{2n+1},\cdots)\in B\} = A^{(n)} \\ &= \{(\xi_{n+1},\cdots,\xi_{2n};\xi_1,\cdots,\xi_n;\xi_{2n+1},\cdots)\in B\} \quad \text{a.s.}. \end{aligned}$$

对每 $n\geqslant 1$,取 $B_n\in\mathscr{B}^n$ 并记

$$A_n = \{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in B_n\},$$

使得

$$(5.1.28) \qquad \lim_{n\to\infty} P(A\triangle A_n) = 0.$$

令

$$A_n^{(n)} = \{(\xi_{n+1},\cdots,\xi_{2n}) \in B_n\}, \quad n \geqslant 1.$$

注意$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$的 i.i.d. 性质表明

$$P(A^{(n)}\triangle A_n^{(n)}) = P(A\triangle A_n),$$

又注意(5.1.27)意味着

$$P(A\triangle A^{(n)}) = 0,$$

由(5.1.28)可得

$$\begin{aligned} P(A_n\backslash A_n^{(n)}) &\leqslant P(A_n\triangle A_n^{(n)}) \\ &\leqslant P(A_n\triangle A) + P(A\triangle A^{(n)}) + P(A^{(n)}\triangle A_n^{(n)}) \\ &= 2P(A_n\triangle A) \to 0, \quad n\to\infty. \end{aligned}$$

因此我们有

$$P(A_n \cap A_n^{(n)}) = P(A_n) - P(A_n\backslash A_n^{(n)}) \to P(A).$$

但是,对每 $n\geqslant 1$, $A_n$ 与 $A_n^{(n)}$ 是相互独立的,故(5.1.28)又给出

$$P(A_n \cap A_n^{(n)}) = P(A_n)P(A_n^{(n)}) = P^2(A_n) \to P^2(A).$$

比较以上得到的两式,我们有

$$P^2(A) = P(A).$$

这说明 $P(A)$非 0 即 1. 证完.

### 1.5 独立随机变量级数

由于 $\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛}\right\}$ 是随机变量列$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$的尾事件,故当$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$独立时,或者 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛,或者 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 不收敛. 因此,我们的问题归结为讨论 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛的必要充分条件. 这个问题的完整回答是下面的定理 5.1.15——Kolmogorov 三级数定理.

**引理 5.1.14** 设独立 r.v. 列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$满足条件(5.1.12). 如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k \text{ 收敛};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{var}\xi_k<\infty.$$

**证明** 设$\{\tilde{\xi}_k,k\geqslant 1\}$是与$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$独立同分布的随机变量列. 对每 $k\geqslant 1$,令 $\xi_k^s=\xi_k-\tilde{\xi}_k$. 由(5.1.12)我们得

$$E\sup_{k\geqslant 1}(\xi_k^s)^2\leqslant 2E\sup_{k\geqslant 1}(\xi_k^2+\tilde{\xi}_k^2)\leqslant 4E\sup_{k\geqslant 1}\xi_k^2<\infty;$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛又推知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tilde{\xi}_k$ a.s. 收敛,从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k^s$ a.s. 收敛. 于是,把定理 5.1.7 用于鞅差序列

$$\{\xi_k^s,\mathscr{F}_k^s=\sigma(\xi_1^s,\cdots,\xi_k^s),k\geqslant 1\}$$

便得

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E((\xi_k^s)^2\mid\mathscr{F}_{k-1}^s)<\infty\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^s \text{ 收敛}\right\}=\Omega\quad \text{a.s.},$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^s)^2=\sum_{k=1}^{\infty}E((\xi_k^s)^2\mid\mathscr{F}_{k-1}^s)<\infty\quad \text{a.s.},$$

亦即 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^s)^2<\infty$. 由此可见

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{var}\xi_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{var}\xi_k^s=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^s)^2<\infty.$$

再把定理 5.1.7 用于鞅差序列

$$\{\xi_k-E\xi_k,\mathscr{F}_k=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_k),k\geqslant 1\}$$

(由于 $E\sup\limits_{k\geqslant 1}(\xi_k-E\xi_k)^2\leqslant 4E\sup\limits_{k\geqslant 1}\xi_k^2<\infty$,故可用),注意

$$\sum_{k=1}^{\infty}E((\xi_k-E\xi_k)^2\mid\mathscr{F}_{k-1})=\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{var}\xi_k<\infty,$$

我们得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\xi_k - E\xi_k) \text{ a.s. 收敛.}$$

这与引理的条件之一 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛一起便推知 $\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k$ 收敛. 证完.

**定理 5.1.15** 设$\{\xi_k,k\geqslant1\}$独立. 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \quad \text{a.s. 收敛}$$

的必要充分条件是对某一个 $C>0$ 或对一切 $C>0$,下面三个级数收敛:

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k|>C);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{var}\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}.$$

**证明** 如对某 $C>0$,三级数收敛,则把定理 5.1.4 用于适 r.v. 序列

$$\{\xi_k,\mathscr{F}_k=\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_k),k\geqslant1\}$$

即知 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛.

反之,如 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛,则 $\xi_k\to0$ a.s. 从而对每 $C>0$, $P(|\xi_k|>C,\text{i.o.})=0$. 于是由 Borel-Cantelli 引理得

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k|>C)<\infty.$$

此外,注意 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛等价于对每 $C>0$, $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}$ a.s. 收

敛. 而由引理 5.1.14, $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}$ a.s. 收敛蕴含着 $\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{var}\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant C\}}$ 均收敛. 因此, 当 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛时, 定理所列之三个级数必须收敛. 证完.

关于独立 r.v. 级数的第二个有意义的结果是它在各种意义下收敛的等价性—— Levy 定理. 这里, 我们将称 r.v. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 是依概率收敛的, 如果存在一个 r.v. $S$ 使 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{P}S$ ; 称 r.v. 级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 是依分布收敛的, 如果存在 d.f. $F$ 使 $S_n\xrightarrow{d}F$. 此外, 一个复数序列的无穷级数 $\prod_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛将理解为 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k$ 存在, 有限且不为 0.

**定理 5.1.16** 记独立 r.v. 序列 $\{\xi_k,k\geqslant1\}$ 对应的 c.f. 列为 $\{f_k,k\geqslant1\}$, 则下列四命题等价:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 依概率收敛;

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 依分布收敛;

(4) $\prod_{k=1}^{\infty}f_k(t)$ 在 $t=0$ 的某邻域收敛.

**证明** 明显地有

$$(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4).$$

因此只需证

$$(4)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1).$$

(4)⇒(2)之证明：如存在 $\varepsilon>0$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} f_k(t) = f(t) \neq 0, \quad |t| \leqslant \varepsilon,$$

则对任何 $n_i<m_i$；$\lim\limits_{i\to\infty} n_i=\infty$，有

$$\lim_{i\to\infty}\prod_{k=n_i+1}^{m_i} f_k(t) = \lim_{i\to\infty}\prod_{k=1}^{m_i} f_k(t)/\lim_{i\to\infty}\prod_{k=1}^{n_i} f_k(t) = 1, \quad |t| \leqslant \varepsilon.$$

由此可见

$$\sum_{k=n_i+1}^{m_i} \xi_k \xrightarrow{P} 0.$$

于是，$\{S_n,n\geqslant 1\}$是依概率收敛的基本列，故存在 r. v. $S$，使$S_n \xrightarrow{P} S$.

(2)⇒(1)之证明：由于 $S_n \xrightarrow{P} S$，故对任给 $\varepsilon>0$ 和 $0<\delta<2$，存在 $N\geqslant 1$ 使 $n\geqslant N$ 时

$$P(|S_n - S| \geqslant \varepsilon/2) < \delta/2;$$

$$P(|S_{n+m} - S_n| \geqslant \varepsilon/4) < \delta/4 < 1/2, \quad m \geqslant 1.$$

对于这样取定的 $N$，显然有

$$|m(S_{n+m} - S_n)| \leqslant \varepsilon/4, \quad n \geqslant N, m \geqslant 1.$$

因而当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|S_k - S| \geqslant \varepsilon\} \\
&\subset \{|S_n - S| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \Big[\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|S_k - S_n| \geqslant \varepsilon/2\}\Big] \\
&\subset \{|S_n - S| \geqslant \varepsilon/2\} \cup \Big[\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\max_{n<k\leqslant m+n}|S_k - S_n| \geqslant \varepsilon/2\}\Big] \\
&\subset \{|S_n - S| \geqslant \varepsilon/2\} \\
&\quad \cup \Big[\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\max_{n<k\leqslant m+n}|(S_k - S_n) + m(S_k - S_n)| \geqslant \varepsilon/4\}\Big].
\end{aligned}$$

于是，由引理 4.4.14 得

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|S_k - S| \geqslant \varepsilon\}\Big)\\
&\leqslant P(|S_n - S| \geqslant \varepsilon/2)\\
&\quad + \lim_{m\to\infty} P\big(\max_{n<k\leqslant m+n} |(S_k - S_n) + m(S_k - S_n)| \geqslant \varepsilon/4\big)\\
&\leqslant \delta/2 + 2\liminf_{m\to\infty} P(|S_{n+m} - S_n| \geqslant \varepsilon/4) < \delta
\end{aligned}
$$

对一切 $n \geqslant N$ 成立. 这说明 $S_n \to S$ a.s.. 证完.

最后,我们来讨论:如果对于某 r.v. $S$,

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k = S \quad \text{a.s.}, \tag{5.1.29}
$$

那么 $S$ 将具有什么性质. 当 $\{\xi_k, k \geqslant 1\}$ 是离散型 r.v. 列的情形,下列 Jessen-Wintner 定理将给予回答.

**定理 5.1.17** 如果 $\{\xi_k, k \geqslant 1\}$ 独立,对每 $k \geqslant 1$, $\xi_k$ 是离散型 r.v. 并且(5.1.29)成立,则 $S$ 必是纯型的(纯型 r.v. 的定义见第一章第四节).

**证明** 对每 $k \geqslant 1$,以 $D_k$ 记 $\xi_k$ 的值域,又 $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. 再令

$$
G = \Big\{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k : n \geqslant 1; m_k \text{ 是整数}, x_k \in D, k = 1, \cdots, n\Big\},
$$

易见 $G$ 是可数集. 对每 $B \in \mathscr{R}$,定义

$$
G \oplus B = \{x + y : x \in G, y \in B\}.
$$

又易见,对任何 $x_1, x_2 \in R$, $x_1 - x_2 \in G$ 有

$$
x_1 \in G \oplus B \Leftrightarrow x_2 \in G \oplus B.
$$

因此,令 $\tilde{\Omega} = \Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛}\Big\}$,则对每 $B \in \mathscr{R}$,每 $n \geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
&\{S \in G \oplus B\} \cap \tilde{\Omega}\}\\
&= \{S \in G \oplus B\} \cap \Big\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k \in G\Big\} \cap \tilde{\Omega}
\end{aligned}
$$

$$= \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \in G \oplus B \right\} \cap \left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k \in G \right\} \cap \tilde{\Omega}$$

$$= \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \in G \oplus B \right\} \cap \tilde{\Omega}.$$

这表明$\{S \in G \oplus B\} \cap \tilde{\Omega}$是一个尾事件，故由 Kolmogorov 零一律推知：对每 $B \in \mathscr{R}$，

$$P(S \in G \oplus B) = 0 \text{ 或 } 1. \tag{5.1.30}$$

如果存在使 $G \oplus B$ 是可数集之 $B \in \mathscr{R}$ 使

$$P(S \in G \oplus B) = 1,$$

那么 $S$ 显然是离散的. 排除这种情况，由(5.1.30)知剩下的情况只能是：对任何使 $G \oplus B$ 成为可数集的 $B \in \mathscr{R}$，均有

$$P(S \in G \oplus B) = 0.$$

在这种情况下，如果存在一个使 $G \oplus B$ 成为 Lebesgue 0 测集的 $B \in \mathscr{R}$，使

$$P(S \in G \oplus B) = 1,$$

那么 $S$ 只在一个 Lebesgue 0 测集 $G \oplus B$ 上取值而在它的任一可列子集上取值的概率为 0，因而 $S$ 是奇异的. 再排除掉这种情况，剩下的唯一可能是：对任何使 $G \oplus B$ 为 Lebesgue 0 测集的 $B \in \mathscr{R}$ 有

$$P(S \in G \oplus B) = 0.$$

这时，对任何 Lebesgue 0 测集 $B \in \mathscr{R}$，有

$$P(S \in B) \leqslant P(S \in G \oplus B) = 0,$$

故 $S$ 是连续型的. 证完.

## 习 题 5.1

1. 设$\{A_n, n \geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的事件列. 证明：如果

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}P(A_nA_{n+1}^c)<\infty,$$

则 $P(A_n\ \text{i.o.})=0$.

2. 设$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$是适 r.v. 列,$\{a_k,k\geqslant1\}$是正实数列. 令

$$A=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k|>a_k|\mathscr{F}_{k-1})\right\}<\infty.$$

证明

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\ 收敛\right\}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\xi_kI_{\{|\xi_k|\leqslant a_k\}}\ 收敛\right\}\quad \text{a.s.}\ A.$$

3. 设$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$是鞅差列. 令

$$A=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(\xi_k^2I_{\{|\xi_k|\leqslant1\}}|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}$$

$$\cap\left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|I_{\{|\xi_k|>1\}}|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\ 收敛\quad \text{a.s.}\ A.$$

4. 设$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$是鞅差列,对每 $k\geqslant1$,$1\leqslant\alpha_k\leqslant2$. 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\ 收敛\ \text{a.s.}\ \left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^{\alpha_k}|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

5. 设$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$是鞅差列,$p\geqslant2$. 证明:对任给 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\ 收敛\ \text{a.s.}\ \left\{\sum_{k=1}^{\infty}[k(\log k)^{1+\varepsilon}]^{p/2-1}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})<\infty\right\}.$$

6. 举出一个鞅差列$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$的例子,使

$$0<P\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\ 收敛\right)<1.$$

7. 判断下列事件是否 r.v. 列$\{\xi_k,k\geqslant1\}$的尾事件:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 收敛;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ 收敛到 r. v. $S$；

(3) $\{\xi_k \in B_k, \text{i.o.}\}$，这里对每 $k\geqslant 1, B_k \in \mathscr{R}$；

(4) $\{\lim_{k\to\infty}\xi_k$ 存在$\}$；

(5) $\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i \text{ 存在}\right\}$.

请说明判断的理由.

8. 设$\{A_n, n\geqslant 1\}$是一个事件列，应用系 5.1.2 证明：如 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n) < \infty$，则

$$P(A_n, \text{i.o.}) = 0.$$

再用 Kolmogorov 零一律完成整个 Borel-Cantelli 引理的证明.

9. 证明随机元序列对称事件的全体形成一个 $\sigma$ 域.

10. 证明随机元序列的尾事件是对称事件.

11. 举例说明随机元序列的对称事件未必是尾事件.

12. 设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$独立，$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ a.s. 收敛. 证明下列三命题等价：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2<\infty$ a.s.；

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}E^2|\xi_k|I_{\{|\xi_k|\leqslant 1\}}<\infty$；

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}E^2\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant 1\}}<\infty$.

13. 设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$独立. 证明：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2 < \infty \quad \text{a.s.}$$

当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2/(1+\xi_k^2) < \infty.$$

14. 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$独立，$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2 < \infty$ a.s.．证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \text{ 收敛 a.s.}$$

当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant 1\}} \text{ 收敛.}$$

15. 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$独立，又对某$C>0$，

$$0\leqslant \inf_{k\geqslant 1}\xi_k \leqslant \sup_{k\geqslant 1}\xi_k \leqslant C \quad \text{a.s.}.$$

证明：如果$\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k=\infty$，则$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k=\infty$ a.s.．

16. 举例说明存在这样的非负独立 r.v. 列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$，使$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k<\infty$ a.s. 但$\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k=\infty$；甚至有这样的非负独立 r.v. 列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$，使$P(\xi_k>0,\text{i.o.})=0$但

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k=\infty.$$

17. 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$独立，又对每$k\geqslant 1$，

$$P(\xi_k=1/k)+P(\xi_k=-1/k)=1.$$

讨论级数$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$的收敛性.

18. 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$独立，对每$k\geqslant 1$，$\xi_k$有密度

$$p_k(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda_k e^{-\lambda_k x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

其中$\lambda_k>0$. 讨论$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$的收敛性.

19. 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$i.i.d.,记$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,n\geqslant 1$.证明:有而且只有下列四种情况发生:

(1) $S_n\to-\infty$ a.s.;

(2) $S_n\to\infty$ a.s.;

(3) $\liminf_{n\to\infty} S_n=-\infty,\limsup_{n\to\infty} S_n=\infty$ a.s.;

(4) 对每$n\geqslant 1,S_n=0$ a.s..

20. 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$ i.i.d.,求$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$收敛的充要条件.证明

(1) 如$a_n=1/2^n$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$ a.s.收敛到$[-1,1]$上均匀分布的r.v.;

(2) 如$a_n=1/3^n$,则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$ a.s.收敛到一个奇异型的r.v..

21. r.v.序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$称为是无条件a.s.收敛的,如果对$N=\{1,2,\cdots\}$到自身的每个1-1的满映射$\{n_1,n_2,\cdots\}$,级数$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{n_k}$ a.s.收敛;称为是绝对a.s.收敛的,如果$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|<\infty$ a.s..举例说明r.v.级数即使无条件收敛也未必绝对收敛.

提示:考察题17的特殊情形$P(\xi_n=1/n)=P(\xi_n=-1/n)=1/2$.

22. 证明:对任一r.v.列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$,如存在$\alpha_n\in(0,1],n\geqslant 1$使$\sum_{n=1}^{\infty}E|\xi_n|^{\alpha_n}<\infty$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ a.s.绝对收敛.

23. 设独立r.v.序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\xi_n^2<\infty;E\xi_n=0,\quad n\geqslant 1.$$

证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$无条件a.s.收敛,并且对$N$到自身的每个1—1的

满映射$\{n_1,n_2,\cdots\}$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{n_k}=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n \quad \text{a.s.}.$$

24. 证明:独立 r.v. 列$\{\xi_n,n\geqslant1\}$的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n$ 无条件 a.s. 收敛的必要充分条件是存在一个 $C>0$ 或对一切 $C>0$ 下列三式成立:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|\xi_n|>C)<\infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|E\xi_n I_{\{|\xi_n|\leqslant C\}}|<\infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\xi_n^2 I_{\{|\xi_n|\leqslant C\}}<\infty.$$

## 第二节　强大数律

### 2.1 随机变量序列的稳定性

我们将称 r.v. 序列$\{S_n,n\geqslant1\}$是稳定的,如果对每 $n\geqslant1$,存在 $b_n\in\boldsymbol{R}$ 使

$$S_n-b_n\to0 \quad \text{a.s.}.$$

本小节将给出 r.v. 列$\{S_n,n\geqslant1\}$稳定的充要条件. 采用以前引进过的符号,以$\{\tilde{S}_n,n\geqslant1\}$记与$\{S_n,n\geqslant1\}$独立同分布的 r.v. 序列,$\{S_n^s=S_n-\tilde{S}_n,n\geqslant1\}$记$\{S_n,n\geqslant1\}$的对称化序列. 此外,对每 $n\geqslant1$,以 $m_n$ 记 $S_n$ 的中位数.

**引理 5.2.1**　对任意的 r.v. 列$\{S_n,n\geqslant1\}$,任意的实数列$\{b_n,n\geqslant1\}$和任给的 $\varepsilon>0$,有

$$(5.2.1)\quad P(\sup_{n\geqslant1}|S_n-m_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant4P(\sup_{n\geqslant1}|S_n^s|\geqslant\varepsilon)$$

$$\leqslant 8P(\sup_{n\geqslant 1}|S_n - b_n| \geqslant \epsilon/2).$$

**证明**　对任给的 $0<\delta<\epsilon$，我们有

$$P(\sup_{n\geqslant 1}|S_n^s| \geqslant \epsilon)$$

$$\leqslant P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|S_n^s| \geqslant \delta\}\Big)$$

$$\leqslant P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|S_n - b_n| \geqslant \delta/2\}\Big) + P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|\widetilde{S}_n - b_n| \geqslant \delta/2\}\Big)$$

$$\leqslant 2P(\sup_{n\geqslant 1}|S_n - b_n| \geqslant \delta/2).$$

上式再令 $\delta\to\epsilon$，即得(5.2.1)之后一不等式.

对任给 $\epsilon>0$ 和 $\delta\in(0,\epsilon)$，令

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1, S_n - m_n \geqslant \delta\}$$

(约定 $\inf\varnothing=\infty$). 易见

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau = n; \widetilde{S}_n - m_n \leqslant 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n - m_n \geqslant \delta, \widetilde{S}_n - m_n \leqslant 0\}$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n^s \geqslant \delta\} \subset \{\sup_{n\geqslant 1} S_n^s \geqslant \delta\}.$$

因此，由中位数的定义及 $\tau$ 与 $\{\widetilde{S}_n, n\geqslant 1\}$ 的独立性又进一步推得

$$P(\sup_{n\geqslant 1}|S_n^s| \geqslant \delta) \geqslant P(\sup_{n\geqslant 1} S_n^s \geqslant \delta)$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n; \widetilde{S}_n - m_n \leqslant 0)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} P(\tau = n) = \frac{1}{2}P(\tau < \infty)$$

$$= \frac{1}{2}P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n - m_n \geqslant \delta\}\Big)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}P(\sup_{n\geqslant 1}(S_n - m_n) \geqslant \epsilon).$$

把此式用于 r. v. 列 $\{-S_n, n\geqslant 1\}$，又得

$$P(\sup_{n\geq 1}|S_n^s|\geqslant\delta)\geqslant\frac{1}{2}P(-\inf_{n\geq 1}(S_n-m_n)\geqslant\varepsilon).$$

再把以上两式相加,便有

$$\begin{aligned}P(\sup_{n\geq 1}|S_n-m_n|\geqslant\varepsilon)&\\ &\leqslant P(\sup_{n\geq 1}(S_n-m_n)\geqslant\varepsilon)+P(\inf_{n\geq 1}(S_n-m_n)\leqslant-\varepsilon)\\ &\leqslant 4P(\sup_{n\geq 1}|S_n^s|\geqslant\delta).\end{aligned}$$

上式中令 $\delta\to\varepsilon$ 即得(5.2.1)之第一式. 证完.

**定理 5.2.2** 对任意 r.v. 列$\{S_n,n\geqslant 1\}$,下列三命题等价:

(1) 存在实数列$\{b_n,n\geqslant 1\}$使

$$S_n-b_n\to 0\quad\text{a.s.};$$

(2) $S_n^s\to 0$ a.s.;

(3) $S_n-m_n\to 0$ a.s..

**证明** 不难见(1),(2),(3)分别等价于

$$\sup_{k\geq n}|S_k-b_k|\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty;$$

$$\sup_{k\geq n}|S_k^s|\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty;$$

$$\sup_{k\geq n}|S_k-m_k\xrightarrow{P}0,\quad n\to 0$$

(见习题 5.2 之 1). 而由引理 5.2.1 又不难见后面那三个命题等价. 证完.

### 2.2 Kronecker 引理

设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是一个 r.v. 序列. 对每 $n\geqslant 1$,令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

如果存在正数列$\{a_n,n\geqslant 1\}$和实数列$\{b_n,n\geqslant 1\}$使

$$(S_n-b_n)/a_n\to 0\quad\text{a.s.},$$

我们就称$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$服从强大数律. 通过 r.v. 级数的收敛性来研究

强大数律是一个重要途径，而使这一点得以实现的主要工具就是 Kronecker 引理.

**引理 5.2.3**(Toeplitz) 设实数列$\{x_n, n\geqslant 1\}$满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \boldsymbol{R}. \tag{5.2.2}$$

如果 $x=0$ 并且实数阵列$\{a_{n,k}, n\geqslant 1, k\geqslant 1\}$符合条件

$$\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}| < \infty;\ \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0,\quad k\geqslant 1, \tag{5.2.3}$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k = x. \tag{5.2.4}$$

如果 $x\neq 0$，则在条件(5.2.3)和

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1 \tag{5.2.5}$$

之下，(5.2.4)仍然成立.

**证明** 如(5.2.2)成立，则存在 $M>0$ 使

$$|x_n| \leqslant M,\quad n\geqslant 1.$$

于是由(5.2.3)之前一式知

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}x_k| \leqslant M\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}| < \infty,\quad n\geqslant 1.$$

由此可见对每 $n\geqslant 1$，$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k$ 绝对收敛. 写

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k - x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(x_k - x) + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} - 1\Big)x.$$

当 $x=0$ 或 $x\neq 0$ 但(5.2.5)成立时，均有

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} - 1\Big)x \to 0,\quad n\to\infty.$$

另一方面，对任 $k_0\geqslant 1$，我们有

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(x_k - x)\Big|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_0} |a_{n,k}(x_k - x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_{n,k}(x_k - x)|$$

$$\leqslant k_0 \big( \max_{1\leqslant k\leqslant k_0} |x_k - x| \big) \big( \max_{1\leqslant k\leqslant k_0} |a_{n,k}| \big)$$

$$+ \big( \sup_{k>k_0} |x_k - x| \big) \sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}|.$$

因而在上式中先令 $n\to\infty$，再令 $k_0\to\infty$ 便由(5.2.3)和(5.2.2)推得

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}(x_k - x) \to 0, \quad n\to\infty.$$

这样，当 $x=0$ 或 $x\neq 0$ 但(5.2.5)成立时总有

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k - x \to 0, \quad n\to\infty,$$

即(5.2.4)成立. 证完.

**引理 5.2.4**(Kronecker)　设 $\{\beta_k, k\geqslant 1\}$ 是实数列，又 $0<\alpha_k\uparrow\infty$. 如果

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k/\alpha_k \text{ 收敛},$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \beta_k/\alpha_n = 0.$$

**证明**　记 $\alpha_0=0$. 又对每 $n\geqslant 1$，令

$$a_{n,k} = \begin{cases} (\alpha_k - \alpha_{k-1})/\alpha_n, & k = 1,\cdots,n, \\ 0, & k > n+1; \end{cases}$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k/\alpha_k.$$

最后，记 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k/\alpha_k$. 不难验证，这样定义的 $\{a_{n,k}, n\geqslant 1, k\geqslant 1\}$ 满足(5.2.3)和(5.2.5)，而且(5.2.2)亦成立. 于是，对它们用

Toeplitz 引理得

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k/\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - \alpha_{i-1})\beta_k/(\alpha_k\alpha_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(\alpha_i - \alpha_{i-1})/\alpha_n]\sum_{k=i}^{n}\beta_k/\alpha_k$$

$$= x - \sum_{i=1}^{\infty}a_{n,i}x_i \to 0, \quad n\to\infty.$$

引理证完.

### 2.3 鞅差列和独立 r.v. 列的强大数律

以$\{S_n,n\geqslant 1\}$记 r.v. 序列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的部分和序列. 把 Kronecker 引理和 2.1 的讨论结合,我们得

**定理 5.2.5** 设$\{\eta_k,\mathscr{F}_{k-1},k\geqslant 1\}$是适 r.v. 序列,$0<\eta_k\uparrow\infty$ a.s.. 下列三命题成立:

(1) 如$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$是适 r.v. 列且 $0<p\leqslant 1$,则

(5.2.6) $$S_n/\eta_n\to 0 \quad \text{a.s.}\ \left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})/\eta_k^p<\infty\right\};$$

(2) 如$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$是鞅差列且 $1<p\leqslant 2$,则(5.2.6)仍成立;

(3) 如$\{\xi_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant 1\}$是鞅差列且 $2<p<\infty$,则对任何满足 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty$ 之正数列$\{a_k,k\geqslant 1\}$,有

$$S_n/\eta_n\to 0 \text{ a.s. } \left\{\sum_{k=1}^{\infty}E(|\xi_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})/(\eta_k^p a_k^{p/2-1})<\infty\right\}.$$

**证明** 命题(1)是系 5.1.5 和 Kronecker 引理之明显推论;又命题(2)和(3)是定理 5.1.6 和 Kronecker 引理之明显推论.

作为定理 5.2.5 的一个特例,对独立 r.v. 序列有如下结论.

**系 5.2.6** 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是独立 r.v. 列,$\{a_k,k\geqslant 1\}$是实数列且

$0<a_n\uparrow\infty$. 下列命题成立：

（1） 如对某 $p\in(0,1]$，有

(5.2.7) $$\sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_k|^p/a_k^p<\infty,$$

则 $S_n/a_n\to 0$ a.s.；

（2） 如对某 $p\in(1,2]$，(5.2.7)成立，则

(5.2.8) $$(S_n-ES_n)/a_n\to 0 \quad \text{a.s.};$$

（3） 如对某 $p\in(2,\infty)$，存在 $\{a_k>0,k\geq 1\}$ 使

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k<\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_k|^p/(\alpha_k^p a_k^{p/2-1})<\infty,$$

则(4.2.9)仍成立.

**证明** 请读者完成.

作为系 5.2.6 命题(2)的推论，又可以得到如下的 Kolmogorov 关于独立 r.v. 序列的强大数律.

**系 5.2.7** 如独立 r.v. 序列 $\{\xi_k,k\geq 1\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{var}\xi_k/k^2<\infty,$$

则

(5.2.9) $$(S_n-ES_n)/n\to 0.$$

当然，Kolmogorov 在证明他的上述强大数律时并不是用我们的方法，作为定理 5.2.5 的推论的推论而完成的. 他用的是他的三级数定理. 按照他的路线，人们曾把上述强大数律推广为下面的形式.

**系 5.2.8** 设 $\{\xi_k,k\geq 1\}$ 是独立 r.v. 序列. 如果存在一个 $p\geq 1$，使

$$\sum_{k=1}^{\infty}E|\xi_k-E\xi_k|^{2p}/k^{p+1}<\infty,$$

则(5.2.9)成立.

我们将乐于指出，上述系 5.2.8 也仅仅是一个关于鞅差序列的一般定理的推论.

**引理 5.2.9** 设 $\{S_k,\mathscr{F}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$ 是非负 $L_1$ 下鞅，$\{\eta_k,\mathscr{F}_{k-1},1\leqslant k\leqslant n\}$ 是适 r.v. 列. 如果

(5.2.10) $$0<\eta_1\leqslant\cdots\leqslant\eta_n$$

而且对每 $k=1,\cdots,n$，记 $\xi_k=S_k-S_{k-1}(S_0\equiv 0)$，$E\xi_k/\eta_k$ 有意义，那么

(5.2.11) $$CP(\max_{1\leqslant k\leqslant n}(S_k/\eta_k)\geqslant C)\leqslant\sum_{k=1}^{n}E\xi_k/\eta_k$$

对任何 $C>0$ 成立.

**证明** 对每 $k=1,\cdots,n$，令

$$S_k^*=\sum_{i=1}^{k}\xi_i/\eta_i.$$

易见 $\{S_k^*,\mathscr{F}_k,k=1,\cdots,n\}$ 是一个下鞅，而且由条件(5.2.10)可得

$$\begin{aligned}S_k^*&=\xi_1/\eta_1+\sum_{i=2}^{k}(S_i-S_{i-1})/\eta_i\\&\geqslant\xi_1/\eta_1+\sum_{i=2}^{k}(S_i/\eta_i-S_{i-1}/\eta_{i-1})\\&=S_k/\eta_k\quad\text{a.s.}\end{aligned}$$

对 $k=1,\cdots,n$ 成立. 对 $C>0$，令

$$\tau=\inf\{1\leqslant k\leqslant n:S_k/\eta_k\geqslant C\}$$

(约定 $\inf\varnothing=n+1$)，由前式和下鞅性质便推知

$$\begin{aligned}CP(\max_{1\leqslant k\leqslant n}(S_k/\eta_k)\geqslant C)&=CP(\tau\leqslant n)\\&=C\sum_{k=1}^{n}P(\tau=k,S_k/\eta_k\geqslant C)\\&\leqslant C\sum_{k=1}^{n}P(\tau=k,S_k^*\geqslant C)\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} ES_k^* I_{\{\tau=k, S_k^* \geqslant C\}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} ES_n^* I_{\{\tau=k, S_k^* \geqslant C\}}$$

$$\leqslant ES_n^* = \sum_{k=1}^{n} E\xi_k/\eta_k,$$

即(5.2.11)成立. 证完.

**定理 5.2.10** 设$\{\xi_k, \mathscr{F}_k, k\geqslant 1\}$是鞅差序列. 如存在$1\leqslant p<\infty$,使

$$(5.2.12) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} E|\xi_k|^{2p}/k^{p+1} < \infty,$$

则$S_n/n \to 0$ a.s..

**证明** 在条件(5.2.12)之下,$\{S_k, \mathscr{F}_k, k\geqslant 1\}$是一个$L_1$鞅. 因此,当$p=1$时用Davis不等式,当$p>1$时用Burkholder不等式,然后再用$C_r$不等式便知

$$E|S_k|^{2p} \leqslant C\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2\Big)^{1/2}\Big\|_{2p}^{2p} = CE\Big(\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2\Big)^p$$

$$\leqslant Ck^{p-1}\sum_{i=1}^{k} E|\xi_i|^{2p}$$

对某$C>0$和任$k\geqslant 1$成立. 于是,对任给$\varepsilon>0$和$1\leqslant n<N$,把引理5.2.9用于下鞅$\{|S_k|^{2p}, \mathscr{F}_k, n\leqslant k\leqslant N\}$,我们有

$$\varepsilon^{2p}P\big(\max_{n\leqslant k\leqslant N}(|S_k|/k)\geqslant \varepsilon\big)$$

$$= \varepsilon^{2p}P\big(\max_{n\leqslant k\leqslant N}(|S_k|^{2p}/k^{2p}) \geqslant \varepsilon^{2p}\big)$$

$$\leqslant E|S_n|^{2p}/n^{2p} + \sum_{k=n+1}^{N} E(|S_k|^{2p} - |S_{k-1}|^{2p})/k^{2p}$$

$$= E|S_N|^{2p}/N^{2p} + \sum_{k=n}^{N-1}[1/k^{2p} - 1/(k+1)^{2p}]E|S_k|^{2p}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{i=1}^{N} E|\xi_i|^{2p}/N^{p+1}$$

$$+\sum_{k=n}^{N-1}k^{p-1}[1/k^{2p}-1/(k+1)^{2p}]\sum_{i=1}^{k}E|\xi_i|^{2p}.\}$$

上式令 $N\to\infty$，注意条件(5.2.12)蕴含

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}E|\xi_i|^{2p}/N^{p+1}=0,$$

又进而得

$$\varepsilon^{2p}P(\sup_{k\geqslant n}(|S_k|/k)\geqslant\varepsilon)$$

$$\leqslant C\sum_{k=n}^{\infty}k^{p-1}[1/k^{2p}-1/(k+1)^{2p}]\sum_{i=1}^{k}E|\xi_i|^{2p}$$

$$=2pC\sum_{k=n}^{\infty}k^{p-1}\left(\int_k^{k+1}x^{-2p-1}\mathrm{d}x\right)\sum_{i=1}^{k}E|\xi_i|^{2p}$$

$$\leqslant 2pC\sum_{k=n}^{\infty}k^{-(p+2)}\sum_{i=1}^{k}E|\xi_i|^{2p}.$$

但是，条件(5.2.12)表明

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-(p+2)}\sum_{i=1}^{k}E|\xi_i|^{2p}=\sum_{i=1}^{\infty}E|\xi_i|^{2p}\sum_{k=i}^{\infty}k^{-(p+2)}$$

$$\leqslant K\sum_{i=1}^{\infty}E|\xi_i|^{2p}/i^{p+1}<\infty$$

($K>0$ 是一常数)，从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}k^{-(p+2)}\sum_{i=1}^{k}E|\xi_i|^{2p}=0,$$

故最终得到

$$\lim_{n\to\infty}P(\sup_{k\geqslant n}(|S_k|/k)\geqslant\varepsilon)=0,\quad \varepsilon>0.$$

这蕴含 $S_n/n\to 0$ a.s.. 证完.

### 2.4 独立同分布随机变量列的强大数律

**引理 5.2.11** 设 r.v. 列 $\{\xi_k,k\geqslant 1\}$ i.i.d.，实数列 $\{a_k,k\geqslant 1\}$ 满足

(5.2.13) $\quad 0 < a_k \uparrow \infty; \quad a_n^2 \sum_{k=n}^{\infty} a_k^{-2} = O(n), n \to \infty.$

如果

(5.2.14) $$\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_1| > a_k) < \infty,$$

则

(5.2.15) $$\sum_{k=1}^{\infty} [\xi_k - E\xi_1 I_{(|\xi_1| \leqslant a_k)}]/a_k \text{ a.s. 收敛;}$$

如果 $\xi_1 \in L_1$,那么在条件(5.2.13),条件

(5.2.16) $$a_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k^{-1} = O(n), \quad n \to \infty$$

和条件(5.2.14)之下,有

(5.2.17) $$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k - E\xi_1)/a_k \text{ a.s. 收敛.}$$

**证明** 记 $a_0 = 0$. 对充分大的 $C$,在条件(5.2.13)和(5.2.14)之下,利用 i.i.d. 性质,我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[(\xi_k I_{(|\xi_k| \leqslant a_k)} - E\xi_1 I_{(|\xi_1| \leqslant a_k)})^2 | \xi_1, \cdots, \xi_{k-1}]/a_k^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_1^2 I_{(|\xi_1| \leqslant a_k)}/a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} \sum_{i=1}^{k} E\xi_1^2 I_{(a_{i-1} < |\xi_1| \leqslant a_i)}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} a_k^{-2} a_i^2 P(a_{i-1} < |\xi_1| \leqslant a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(a_{i-1} < |\xi_1| \leqslant a_i) a_i^2 \sum_{k=i}^{\infty} a_k^{-2}$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} i P(a_{i-1} < |\xi_1| \leqslant a_i)$$

$$= C \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{i} P(a_{i-1} < |\xi_1| \leqslant a_i)$$

$$= C\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_1| > a_{k-1}) < \infty \quad \text{a.s.}.$$

因此,把命题 5.1.3 用于鞅差序列

$$\{(\xi_k I_{\{|\xi_k| \leqslant a_k\}} - E\xi_1 I_{\{|\xi_1| \leqslant a_k\}})/a_k, \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_k), k \geqslant 1\},$$

便得

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\xi_k I_{\{|\xi_k| \leqslant a_k\}} - E\xi_1 I_{\{|\xi_1| \leqslant a_k\}}]/a_k \ \text{a.s. 收敛.}$$

但是,由 Borel-Cantelli 引理和(5.2.14)推知

$$P(|\xi_k| > a_k, \text{i.o.}) = 0,$$

因而又有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k I_{\{|\xi_k| > a_k\}} \ \text{a.s. 收敛.}$$

把以上两个 a.s. 收敛的级数相加,就得(5.2.15). 这证明了引理的第一个结论.

在条件(5.2.13),(5.2.14)和(5.2.16)之下,如 $\xi_1 \in L_1$,那么不难见

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |E\xi_1 - E\xi_1 I_{\{|\xi_1| \leqslant a_k\}}|/a_k &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} E|\xi_1| I_{\{|\xi_1| > a_k\}}/a_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} E|\xi_1| I_{\{a_i < |\xi_1| \leqslant a_{i+1}\}}/a_k \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} P(a_i < |\xi_1| \leqslant a_{i+1}) a_{i+1} a_k^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(a_i < |\xi_1| \leqslant a_{i+1}) a_{i+1} \sum_{k=1}^{i+1} a_k^{-1} \\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{\infty} (i+1) P(a_i < |\xi_1| \leqslant a_{i+1}) \\
&\leqslant C\sum_{i=1}^{\infty} P(|\xi_1| \geqslant a_i) < \infty
\end{aligned}$$

($C$ 是一充分大之常数)成立. 于是,级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}[E\xi_1 - E\xi_1 I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}}]/a_k$$

收敛. 把(5.2.15)减去这个级数即得(5.2.17). 这又证明了第二个结论. 引理证完.

利用引理 5.2.11,我们来推导 i.i.d. 序列强大数律的第一个定理. 仍以$\{S_n,n\geqslant 1\}$记$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$的部分和序列.

**定理 5.2.12** 设 i.i.d. 序列$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$和满足

(5.2.18) $$0<a_k\uparrow\infty$$

的实数列$\{a_k,k\geqslant 1\}$使得(5.2.14)成立. 又设下列三个条件中有一个满足:

(1) $a_n/n\uparrow\infty$;

(2) $E\xi_1=0,a_n/n\downarrow$但(5.2.13)成立;

(3) $E\xi_1=0$ 且(5.2.13)和(5.2.16)成立.

则 $S_n/a_n\to 0$ a.s..

**证明** 在定理的条件(1)下,有

$$a_n^2\sum_{k=n}^{\infty}a_k^{-2}=n^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(a_n/n)^2}{(a_k/k)^2}\cdot\frac{1}{k^2}$$

$$\leqslant n^2\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}=O(n),\quad n\to\infty.$$

此式加上(5.2.18)得(5.2.13). 因此由引理 5.2.11 得(5.2.15). 再利用 Kronecker 引理又得

(5.2.19) $$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E\xi_1 I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}})\to 0\quad\text{a.s.}$$

此外,对任 $n_0\geqslant 1$,当 $n>n_0$ 时,有

$$\frac{1}{a_n}\left|\sum_{k=1}^{n}E\xi_1 I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{a_n}\Big[\sum_{k=1}^{n_0}E|\xi_1|I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}}$$

$$+\sum_{k=n_0+1}^{n} E|\xi_1|(I_{(|\xi_1|\leqslant a_{n_0})}+I_{(a_{n_0}<|\xi_1|\leqslant a_k)})\Big]$$

$$\leqslant \frac{1}{a_n}\Big[n_0 a_{n_0}+(n-n_0)a_{n_0}$$

$$+\sum_{k=n_0+1}^{n}\sum_{i=n_0+1}^{k} a_i P(a_{i-1}<|\xi_1|\leqslant a_i)\Big]$$

$$=\frac{1}{a_n}\Big[n a_{n_0}+\sum_{i=n_0+1}^{n}(n-i+1)a_i P(a_{i-1}<|\xi_1|\leqslant a_i)\Big]$$

$$\leqslant n a_{n_0}/a_n+\sum_{i=n_0+1}^{n}(n/a_n)a_i P(a_{i-1}<|\xi_1|\leqslant a_i)$$

$$\leqslant n a_{n_0}/a_n+\sum_{i=n_0+1}^{n} iP(a_{i-1}<|\xi_1|\leqslant a_i)$$

$$=n a_{n_0}/a_n+n_0\sum_{i=n_0+1}^{n}P(a_{i-1}<|\xi_1|\leqslant a_i)$$

$$+\sum_{i=n_0+1}^{n}(i-n_0)P(a_{i-1}<|\xi_1|\leqslant a_i)$$

$$\leqslant n a_{n_0}/a_n+n_0 P(|\xi_1|>a_{n_0})+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}P(|\xi_1|>a_k).$$

因而由条件(1)推知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=1}^{n}E\xi_1 I_{(|\xi_1|\leqslant a_k)}\Big|$$

$$\leqslant n_0 P(|\xi_1|>a_{n_0})+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}P(|\xi_1|>a_k).$$

再在上式中令 $n_0\to\infty$，由(5.2.14)进而得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}E\xi_1 I_{(|\xi_1|\leqslant a_k)}=0. \tag{5.2.20}$$

把这个式子与(5.2.19)对照，我们得 $S_n/a_n\to 0$ a.s.，从而证明了

定理的结论在条件(1)下成立.

在条件(2)之下,由引理 5. 2. 11 和 Kronecker 引理知(5. 2. 19)仍成立. 而且此时对任何 $n>n_0\geqslant 1$,有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{a_n}\left|\sum_{k=1}^{n}E\xi_1 I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}}\right| \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{a_n}\left(\left|\sum_{k=1}^{n_0}E\xi_1 I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}}\right|+\left|\sum_{k=n_0+1}^{n}E\xi_1 I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}}\right|\right) \\
&\qquad= \frac{1}{a_n}\left(\left|\sum_{k=1}^{n_0}E\xi_1 I_{\{|\xi_1|\leqslant a_k\}}\right|+\left|\sum_{k=n_0+1}^{n}E\xi_1 I_{\{|\xi_1|>a_k\}}\right|\right) \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{a_n}\left[\sum_{k=1}^{n_0}a_k+\sum_{k=n_0+1}^{n}E|\xi_1|(I_{\{a_k<|\xi_1|\leqslant a_n\}}+I_{\{|\xi_1|>a_n\}})\right] \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n_0}k(a_k/k)+\sum_{k=n_0+1}^{n}P(a_k<|\xi_1|\leqslant a_n) \\
&\qquad\quad+\frac{n}{a_n}E|\xi_1|I_{\{|\xi_1|>a_n\}} \\
&\qquad\leqslant \frac{a_1}{a_n}\sum_{k=1}^{n_0}k+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}P(|\xi_1|>a_k) \\
&\qquad\quad+\frac{n}{a_n}\sum_{k=n}^{\infty}a_{k+1}P(a_k<|\xi_1|\leqslant a_{k+1}) \\
&\qquad\leqslant \frac{a_1}{a_n}\sum_{k=1}^{n_0}k+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}P(|\xi_1|>a_k) \\
&\qquad\quad+\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)P(a_k<|\xi_1|\leqslant a_{k+1}).
\end{aligned}
$$

在上式中先令 $n\to\infty$ 再令 $n_0\to\infty$ 同样可得到(5. 2. 20),从而证明了在条件(2)之下定理结论仍成立.

最后,注意在条件(3)之下定理之结论乃是引理 5. 2. 11 和

Kronecker 引理之直接推论. 定理证完.

下面，我们利用定理 5.2.12 来讨论对于形如 $a_n=n^\alpha(\alpha>0)$ 的序列，$S_n/a_n\to 0$ a.s. 的必要充分条件. 这些条件将加在 r.v. 列 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ 的共同 d.f. 的矩上，以便于验证. 所得到的主要结论——定理 5.2.15 一般称为 Marcinkiewicz-Zygmund 强大数律.

**引理 5.2.13** 对任何 r.v. $\xi$ 和实数 $p>0$，下列三种陈述等价：

(1) $E|\xi|^p<\infty$；

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}P(|\xi|>k)<\infty$；

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi|^p>k)<\infty$.

**证明** 我们有

$$E|\xi|^p=p\int_0^{\infty}x^{p-1}P(|\xi|>x)\mathrm{d}x$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}x^{p-1}P(|\xi|>x)\mathrm{d}x.$$

因此，当 $0<p\leqslant 1$ 时，有

$$p\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}P(|\xi|>k)\leqslant E|\xi|^p\leqslant p\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}P(|\xi|>k)+1;$$

当 $p>1$ 时，有

$$\frac{p}{2^p}\sum_{k=3}^{\infty}(k+1)^{p-1}P(|\xi|>k+1)$$

$$\leqslant p\sum_{k=3}^{\infty}(k-1)^{p-1}P(|\xi|>k)$$

$$\leqslant E|\xi|^p\leqslant p\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}P(|\xi|>k-1)$$

$$\leqslant p2^p\Big[\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1}P(|\xi|>k)+1\Big].$$

于是可见(1)与(2)等价.

由于当 $p=1$ 时,(1)和(2)等价,故对任给 r.v. $\eta$,我们有

$$E|\eta|<\infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}P(|\eta|>k)<\infty.$$

对任 $p>0$,于上述结论中取 $\eta=|\xi|^p$,就知(1)与(3)等价. 证完.

**引理 5.2.14** 以 $m$ 记 r.v. $\xi$ 的中位数. 以 $\xi^s$ 记 $\xi$ 的对称化 r.v.,则对任 $p>0,\varepsilon>0$,有

$$(5.2.20)\quad E|\xi-m|^pI_{\{|\xi-m|\leqslant\varepsilon\}} \leqslant 2[\varepsilon^pP(|\xi^s|>\varepsilon)+E|\xi^s|^pI_{\{|\xi^s|\leqslant\varepsilon\}}].$$

**证明** 利用引理 4.3.12,我们有

$$\begin{aligned}E|\xi-m|^pI_{\{|\xi-m|\leqslant\varepsilon\}} &\leqslant E(|\xi-m|\wedge\varepsilon)^p=p\int_0^{\varepsilon}x^{p-1}P(|\xi-m|\geqslant x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2p\int_0^{\varepsilon}x^{p-1}P(|\xi^s|\geqslant x)\mathrm{d}x=2E(|\xi^s|\wedge\varepsilon)^p\\ &=2[\varepsilon^pP(|\xi^s|>\varepsilon)+E|\xi^s|^pI_{\{|\xi^s|\leqslant\varepsilon\}}].\end{aligned}$$

证完.

**定理 5.2.15** 设$\{\xi_k,k\geqslant1\}$是 i.i.d. 的 r.v. 序列,$0<p<2$. 则下列四命题等价:

(1) $E|\xi_1|^p<\infty$;

(2) 当 $0<p<1$ 时,

$$S_n/n^{1/p}\to 0\quad \text{a.s.};$$

当 $1\leqslant p<2$ 时,$E|\xi_1|<\infty$且

$$(S_n-nE\xi_1)/n^{1/p}\to 0\quad \text{a.s.};$$

(3) 存在实数列$\{b_n,n\geqslant1\}$,使

$$(S_n-b_n)/n^{1/p}\to 0\quad \text{a.s.};$$

(4) $\xi_n/n^{1/p}\to 0$ a.s..

**证明** (1)等价于对每 $\varepsilon>0$,$E(|\xi_1|/\varepsilon)^p<\infty$. 而后者又等价于对每 $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n/n^{1/p}| \geqslant \varepsilon) < \infty$$

(引理 5.2.13). 由 Borel-Cantelli 引理，又进而等价于对每 $\varepsilon>0$，

$$P(|\xi_n/n^{1/p}| \geqslant \varepsilon, \text{i.o.}) = 0,$$

即(4)成立. 这证明了(1)⇔(4). 因此只需再证

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).$$

(1)⇒(2)：对每 $n\geqslant 1$，记 $a_n = n^{1/p}$. 由引理 5.2.13 知(1)蕴含(5.2.14)对此$\{a_n, n\geqslant 1\}$成立. 又当 $0<p<1$ 时，定理 5.2.12 之条件(1)满足；当 $1\leqslant p<2$ 时，$a_n/n \downarrow$ 且

$$a_n^2 \sum_{k=n}^{\infty} a_k^{-2} = n^{2/p} \sum_{k=n}^{\infty} k^{-2/p} = O(n),$$

即(5.2.13)成立，故定理 5.2.12 之条件(2)满足. 于是由定理 5.2.12 知(1)蕴含(2).

(2)⇒(3)：显然.

(3)⇒(1)：以$\{\xi_k^s, k\geqslant 1\}$记$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$的对称化序列，$\{S_n^s, n\geqslant 1\}$记$\{\xi_k^s, k\geqslant 1\}$的部分和序列. 据定理 5.2.2，由(3)推知 $S_n^s/n^{1/p} \to 0$ a.s.，从而

$$\xi_n^s/n^{1/p} = S_n^s/n^{1/p} - [(n-1)^{1/p}/n^{1/p}] S_{n-1}^s/(n-1)^{1/p} \to 0 \quad \text{a.s.}.$$

据前面已证之(1)⇔(4)，这表明 $E|\xi_1^s|^p<\infty$. 据引理 5.2.14(在(5.2.20)中令 $\varepsilon\to\infty$)，又得

$$E|\xi_1 - m(\xi_1)|^p \leqslant 2E|\xi_1^s|^p < \infty.$$

于是我们有

$$E|\xi_1|^p \leqslant 2^{p-1}[E|\xi_1 - m(\xi_1)|^p + m(\xi_1)^p] < \infty.$$

定理证完.

著名的 Kolmogorov 强大数律是我们的定理 5.2.15 的特例，它可以写成下面这种更强的形式.

**定理 5.2.16** 设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$是 i.i.d. 的 r.v. 序列. 下列两命题成立：

(1) 如 $E\xi_1$ 有意义，则 $S_n/n\to E\xi_1$ a.s.；

(2) 如对某 $a\in \boldsymbol{R}$，$S_n/n\to a$ a.s.，则 $E|\xi_1|<\infty$ 且 $a=E\xi_1$.

**证明** 当 $E|\xi_1|<\infty$ 时，命题(1)是定理 5.2.15 之特例. 当 $E\xi_1=\infty$ 时，对任 $M>0$，有 $E|\xi_1\wedge M|<\infty$，因而对 $\{\xi_k\wedge M,k\geqslant 1\}$ 用定理 5.2.15 可得

$$\liminf_{n\to\infty} S_n/n \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k\wedge M)=E(\xi_1\wedge M)\quad \text{a.s.}.$$

在上式中再令 $M\to\infty$，便得

$$\lim_{n\to\infty} S_n/n=\infty=E\xi_1\quad \text{a.s.},$$

即(1)成立. 类似地可证 $E\xi_1=-\infty$ 时命题(1)成立. 下面证明命题(2). 如 $S_n/n\to a\in \boldsymbol{R}$ a.s.，则

$$\xi_n/n=S_n/n-[(n-1)/n]S_{n-1}/(n-1)\to 0\quad \text{a.s.}.$$

据定理 5.2.15，这意味着 $E|\xi_1|<\infty$ 且 $a=E\xi_1$. 证完.

定理 5.2.15 在 $0<p<2$ 时较完整地解决了当取 $a_n=n^{1/p}$ 作为"标准化"常数列时 i.i.d. 序列的强大数律问题. 读者自然关心，当 $p\geqslant 2$ 时，类似的强大数律是否还成立. 下面的命题说明：对这个问题的回答是否定的.

**命题 5.2.17** 设 r.v. 列 $\{\xi_k,k\geqslant 1\}$ i.i.d.，非退化. 如 $p\geqslant 2$，则对任何实数列 $\{b_n,n\geqslant 1\}$ 均有

$$\limsup_{n\to\infty}|S_n-b_n|/n^{1/p}=\infty\quad \text{a.s.}. \tag{5.2.21}$$

**证明** 谬设(5.2.21)不成立，即存在 $C>0$ 和实数列 $\{b_n,n\geqslant 1\}$ 使

$$P\big(\limsup_{n\to\infty}|S_n-b_n|/n^{1/p}\leqslant C\big)>0.$$

由于 $\{\limsup_{n\to\infty}|S_n-b_n|/n^{1/p}\leqslant C\}$ 是对称事件，故由 Hewitt-Savage 零一律(定理 5.1.13)推知

$$P\big(\limsup_{n\to\infty}|S_n-b_n|/n^{1/p}\leqslant C\big)=1.$$

以 $\{\tilde{\xi}_k,k\geqslant 1\}$ 记与 $\{\xi_k,k\geqslant 1\}$ 独立同分布的 r.v. 列，对每 $n\geqslant 1$，令 $\xi_n^s$

$=\xi_n-\xi_n',\widetilde{S}_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k'$ 和 $S_n^s=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^s$. 我们又进而推知

$$(5.2.22)\quad \limsup_{n\to\infty}|S_n^s|/n^{1/p}\leqslant \limsup_{n\to\infty}|S_n-b_n|/n^{1/p}$$
$$+\limsup_{n\to\infty}|\widetilde{S}_n-b_n|/n^{1/p}$$
$$\leqslant 2C\quad \text{a.s.}.$$

于是，我们有

$$(5.2.23)\quad \limsup_{n\to\infty}P(|S_n^s|/n^{1/2}>3C)$$
$$\leqslant \limsup_{n\to\infty}P(|S_n^s|/n^{1/p}>3C)=0.$$

此外，由(5.2.22)还可以推知

$$\limsup_{n\to\infty}|\xi_n^s|/n^{1/p}\leqslant 2\limsup_{n\to\infty}|S_n^s|/n^{1/p}\leqslant 4C\quad \text{a.s.}$$

从而 $P(|\xi_n^s|>5Cn^{1/p},\text{i.o.})=0$ 亦即

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k^s|>5Ck^{1/p})<\infty$$

(Borel-Cantelli 引理). 但由引理 5.2.13，这意味着

$$E|\xi_n^s|^p<\infty,$$

从而更有 $E|\xi_1^s|^2<\infty$. 因为 $\xi_1$ 非退化，故又有

$$0<2\text{var}\xi_1=E|\xi_1^s|^2<\infty.$$

这样，利用系 4.3.6 便得

$$\lim_{n\to\infty}P(|S_n^s|/n^{1/p}>3C)=2\Phi(-3C/\sqrt{2\text{var}\xi_1})>0,$$

与(5.2.23)矛盾. 证完.

## 习 题 5.2

1. 设 $\xi$ 和 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 都是 r.v.. 证明下列四命题等价：

(1) $\xi_n\to\xi$ a.s.;

(2) 对任给 $\varepsilon>0$, $P(|\xi_n-\xi|\geqslant\varepsilon,\text{i.o.})=0$;

(3) 对任给 $\varepsilon>0$, $P(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|\xi_k-\xi|\geqslant\varepsilon\})\to 0,\ n\to\infty$;

(4) $\sup_{k\geqslant n}|\xi_k-\xi|\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty$.

2. 证明系 5.2.6 和 5.2.7.

3. 证明：对任一 r.v. 列 $\{S_n,n\geqslant 1\}$，存在实数列 $\{b_n,n\geqslant 1\}$ 和正数列 $\{a_n,n\geqslant 1\}$ 使

$$(S_n-b_n)/a_n\to 0\quad \text{a.s.}.$$

4. 设 $\{S_n,n\geqslant 1\}$ 是同分布的 r.v. 列，$E|S_1|<\infty$. 证明：$S_n/n\to 0$ a.s..

5. 举例说明存在这样的同分布 r.v. 列 $\{S_n,n\geqslant 1\}$ 和正数列 $0<a_n\uparrow\infty$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|S_1|\geqslant a_n)<\infty$$

但 $S_n/a_n\to 0$ a.s. 并不成立.

6. 设 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 是 $m$ 相依序列，对每 $k\geqslant 1$，$E\xi_k=0$. 证明：如果

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k^2/k^2<\infty,$$

则 $\sum_{k=1}^{n}\xi_k/n\to 0$ a.s..

7. 举例说明：如 $\{\xi_k,k\geqslant 1\}$ 独立，对每 $k\geqslant 1$，$E\xi_k=0$，即使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k^2=0,$$

下述强大数律未必成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=0\quad \text{a.s.}.$$

8. 举例说明：如 $\{\xi_k,k\geqslant 1\}$ 独立，对每 $k\geqslant 1$，$E\xi_k=0$，即使

$$\sum_{k=1}^{\infty}E\xi_k^2/k^2=\infty,$$

下述强大数律仍有可能成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=0\quad \text{a.s.}.$$

9. 设$\{\xi_k,k\geqslant1\}$独立，对每$k\geqslant1$，

$$P(\xi_k=k^\alpha)=P(\xi_k=-k^\alpha)=1/2.$$

问当$\alpha$取何值时，有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k=0\quad \text{a.s.}$？

10. 证明：如果$\{\xi_k,k\geqslant1\}$独立，又存在r.v.$\eta\in L_1$和$K>0$使

$$P(|\xi_k|\geqslant x)\leqslant KP(|\eta|\geqslant x)$$

对一切$x>0$和$k\geqslant1$成立，则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-E\xi_k)\to0\quad \text{a.s.}.$$

11. 设$\{\xi_k,k\geqslant1\}$独立，对每$k\geqslant1$，

$$P(\xi_k=1)=p_k,\quad P(\xi_k=0)=1-p_k$$

而且

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=\infty.$$

试证：$\sum_{k=1}^{n}\xi_k/\sum_{k=1}^{n}E\xi_k\to1$ a.s..

12. 举一个i.i.d.序列$\{\xi_k,k\geqslant1\}$的例子，使

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\xrightarrow{P}0$$

但$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k,n\geqslant1\right\}$并不a.s.收敛.

提示：考虑i.i.d.的对称r.v.序列$\{\xi_k,k\geqslant1\}$，其共同分布满足

$$P(|\xi_k|>x)=e/(x\log x),\quad x\geqslant e.$$

13. 设$\{\xi_n,n\geqslant1\}$是i.i.d.序列，满足

$$P(\xi_n=-1)=P(\xi_n=1)=1/2.$$

证明：$\sum_{k=1}^{n}\xi_k/(n^{1/2}\log n) \to 0$ a.s..

14. 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$i.i.d.，存在$C>0$使对每$n\geqslant 1$，$|\xi_n|\leqslant C$ a.s.，$a>0$. 证明：如$\{a_n>0, n\geqslant 1\}$使$a^n/a_n\to 0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a^k\xi_k/a_n = 0 \quad \text{a.s.}.$$

15. 证明：如$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$i.i.d.，则

$$\frac{\log n}{n}\sum_{k=3}^{n}\frac{\xi_k}{\log k}\to 0 \quad \text{a.s.},$$

当且仅当$E|\xi_1|<\infty$，$E\xi_1=0$.

16. 设$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$i.i.d.，其共同d.f.为$F$，以$F_n$记它的经验d.f.. 证明：对每$x\in\boldsymbol{R}$，

$$F_n(x)\to F(x) \text{ a.s.};$$

$$F_n(x-0)\to F(x-0) \text{ a.s.}.$$

17. 设如题16. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|F_n(x)-F(x)| = 0 \quad \text{a.s.}.$$

提示：定义$F^-$如习题3.4之2，令

$$A_{n,k,m} = |F_n(F^-(k/m)) - F(F^-(k/m))|;$$

$$B_{n,k,m} = |F_n(F^-(k/m)-0) - F(F^-(k/m)-0)|;$$

$$D_{n,m} = \max_{1\leqslant k\leqslant m}(A_{n,k,m}, B_{n,k,m}),$$

则对每$m\geqslant 1$，

$$\sup_{x\in\boldsymbol{R}}|F_n(x)-F(x)| \leqslant D_{n,m} + 1/m.$$

再令

$$K_{k,m} = \{F_n(F^-(k/m)) \stackrel{\times}{\to} F(F^-(k/m))\};$$

$$L_{k,m} = \{F_n(F^-(k/m)-0) \stackrel{\times}{\to} F(F^-(k/m)-0)\};$$

$$C = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{m}(K_{k,m}\cup L_{k,m}).$$

证明：当$\omega\notin C$时，对每$m\geqslant 1$，$\lim_{n\to\infty}D_{n,m}(\omega) = 0$.

18. 对任一实数 $\omega\in[0,1]$，考虑其 10 进制展开：

$$(*)\qquad \omega=\sum_{k=1}^{\infty}x_k/10^k,$$

其中对每 $k\geqslant1$，$x_k=0,1,\cdots,8$ 或 9. 令

$$N_n^{(i)}(\omega)=\#\{k:x_k=i,1\leqslant k\leqslant n\},\quad i=0,1,\cdots,9.$$

称 $\omega\in[0,1]$是正规的，如对每 $i=0,1,\cdots,9$

$$N_n^{(i)}(\omega)/n\to1/10,\quad n\to\infty.$$

证明：除去一个 Lebesgue 0 测集，$[0,1]$中的实数都是正规的.

提示：令 $\Omega=[0,1]$，$\mathscr{F}=\mathscr{R}\cap[0,1]$，$P$—— $[0,1]$上的 Lebesgue 测度. 在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上定义 r. v. 序列$\{\xi_n,n\geqslant1\}$：当 $\omega$ 由$(*)$表示时

$$\xi_n(\omega)=x_n,\quad n\geqslant1.$$

则$\{\xi_n,n\geqslant1\}$i. i. d..

19. 设 $f$ 和 $g$ 是$[0,1]$上定义的实可测函数，存在 $C>0$ 使 $0<f(x)<Cg(x)<\infty$对每 $x\in[0,1]$成立. 证明：如果 $\int_0^1g(x)\mathrm{d}x<\infty$，则

$$\int_{\substack{0\leqslant x_i\leqslant1\\ i=1,\cdots,n}}\cdots\int\frac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}g(x_i)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\to\frac{\int_0^1f(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1g(x)\mathrm{d}x},\quad n\to\infty.$$

提示：令 $\Omega=[0,1]^{\infty}$，$\mathscr{F}=\{\mathscr{R}\cap[0,1]\}^{\infty}$，$P=\mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k$，其中对每 $k\geqslant1$，$\mu_k$ 是$[0,1]$上的 Lebesgue 测度. 对每 $\omega=(\omega_n,n\geqslant1)$，令

$$\xi_n(\omega)=\omega_n,\quad n\geqslant1,$$

则$\{\xi_n,n\geqslant1\}$i. i. d..

20. 设$\{\xi_k,k\geqslant1\}$i. i. d.，其共同 d. f. 连续，令

$$N_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_k,\quad n\geqslant1.$$

其中 $\eta_1=1$，对每 $k>1$，$\eta_k=I_{\{\xi_i<\xi_k;1\leqslant i<k\}}$. $N_n$ 称为时刻 $n$ 以前$\{\xi_n,n$

$\geqslant 1\}$破记录的次数. 证明

$$N_n/\log n \to 1 \text{ a.s.}.$$

提示：证明$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$独立且

$$P(\eta_n = 1) = 1/n, \quad n \geqslant 1.$$

21. 设如题 20. 定义$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$破记录的时刻$\{\tau_k, k\geqslant 1\}$如第二章第二节，证明：

$$\log\tau_n/n \to 1 \quad \text{a.s.}.$$

提示：$\tau_n$ 和上题之 $N_n$ 有关系

$$P(\tau_k > t) = P(N_t < k).$$

## 第三节　重对数律

### 3.1 问题的提出

设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$是定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的 i. i. d. 序列，$E\xi_1^2<\infty$. 不失一般性，我们假定 $E\xi_1=0, E\xi_1^2=1$. 对每 $n\geqslant 1$，记 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$. 在第二节，我们说明了当 $0<p<2$ 时

$$\lim_{n\to\infty} S_n/n^{1/p} = 0 \quad \text{a.s.};$$

当 $p\geqslant 2$ 时

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n|/n^{1/p} = \infty \quad \text{a.s.}.$$

这使我们对$|S_n|$当 $n\to\infty$时变化的阶有一个大致的了解：对任何 $0<p<2$，$|S_n|$是$o(n^{1/p})$的阶；对几乎每一个 $\omega\in\Omega$，$|S_n(\omega)|$都有一个子序列趋于$\infty$的速度比 $n^{1/2}$要快. 正是为了"精确地"描述当 $n\to\infty$时 $S_n$ 变化的阶，人们发现了所谓的重对数律. 约定

$$\log^{(2)}n = \begin{cases} 1, & 1\leqslant n\leqslant \mathrm{e}, \\ \log\log n, & n > \mathrm{e}. \end{cases}$$

Hartman-Wintner 所得到的重对数律表明

(5.3.1) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n\log^{(2)}n)^{1/2}} = 1 \quad \text{a.s.};$$

(5.3.2) $$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n\log^{(2)}n)^{1/2}} = -1 \quad \text{a.s.}.$$

这意味着 $S_n$ 当 $n\to\infty$ 的阶是 $O((n\log^{(2)}n)^{1/2})$.

沿用第三章第三节的记号，以 $C(\{x_n\})$ 记实数列 $\{x_n, n\geqslant 1\}$ 的全部极限点. 又把闭区间 $[-1,1]$ 记作 $I$. 为了书写简洁，在这一节我们还令

$$a_n = (2n\log^{(2)}n)^{1/2}, \quad n \geqslant 1.$$

Hartman-Wintner 的重对数律可以这样理解：存在 $\Omega_0 \in \mathscr{F}$, $P(\Omega_0)=1$，使当 $\omega\in\Omega_0$ 时，

$$C(\{S_n(\omega)/a_n\}) \subset I.$$

我们把这件事称为 $\{S_n/a_n, n\geqslant 1\}$ 的极限点 a.s. 在区间 $I$ 内，记成

(5.3.3) $$C(\{S_n/a_n\}) \subset I \quad \text{a.s.}.$$

随着研究的深入，人们又讨论了上述命题的反问题：$\{S_n/a_n, n\geqslant 1\}$ 的极限点是否 a.s. 地充满区间 $I$，即

(5.3.4) $$C(\{S_n/a_n\}) \supset I \quad \text{a.s.}$$

是否成立？这里，(5.3.4)的准确意义是：存在 $\Omega_0\in\mathscr{F}$，使 $P(\Omega_0)=1$ 且对每 $\omega\in\Omega_0$,

$$C(\{S_n(\omega)/a_n\}) \supset I.$$

当(5.3.3)和(5.3.4)同时成立时，我们记

(5.3.5) $$C(\{S_n/a_n\}) = I \quad \text{a.s.}$$

并把它称为广义的重对数律.

对于 i.i.d. 序列的广义重对数律，Acosta 在 1982 年提供了一个简捷的证明(参见 Annals of Probability, Vol 10). 这个证明并不比 Hartman-Wintner 重对数律的证明难. 因此，我们将采用 Acosta的方法直接证明广义重对数律，而把一般意义下的重对数律作为它的推论.

应该指出，关于重对数律的研究决不仅仅限于 i. i. d. 序列. 例如，关于一般独立 r. v. 序列的 Kolmogorov 重对数律及其向鞅差序列的推广就是一个十分重要的内容. 但是，由于篇幅的限制，对这些内容我们都不打算进行讨论. 而仅仅希望通过对 i. i. d. 情况的讨论，大家能对重对数律问题的提法，它的内容、方法和意义有一个初步的了解.

## 3.2 引理

我们将证明四个引理. 前二个引理是对一般独立 r. v. 序列说的，而后二个引理只对 i. i. d. 序列适用. 和以前一样，把 r. v. 序列 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ 的部分和序列记作 $\{S_n, n\geqslant 1\}$. 另外，序列 $\{a_n, n\geqslant 1\}$ 定义如 3.1.

**引理 5.3.1** 设独立 r. v. 列 $\{\xi_k, n\geqslant 1\}$ 满足

(5.3.6) $$S_n/a_n \xrightarrow{P} 0.$$

如果对某个 $\beta>0$，存在 $\alpha>1$，$C>0$ 和 $n_0\geqslant 1$ 使

(5.3.7) $$P(S_n/a_n > \beta) \leqslant C\exp(-\alpha\log^{(2)} n)$$

对一切 $n\geqslant n_0$ 成立，则

(5.3.8) $$\limsup_{n\to\infty} S_n/a_n \leqslant \beta \quad \text{a. s.}.$$

**证明** 为证(5.3.8)，只需证对任给 $\varepsilon>0$，

(5.3.9) $$P(S_n/a_n > \beta + \varepsilon, \text{i. o.}) = 0.$$

设非降正整数列 $n_k\uparrow\infty$. 则事件"有无穷个 $n$ 使 $S_n/a_n>\beta+\varepsilon$"也就是事件"有无穷多个间隔 $(n_k, n_{k+1}]$ 使对某 $n\in(n_k, n_{k+1}]$ 有 $S_n/a_n>\beta+\varepsilon$". 但由于 $a_n$ 对 $n$ 非降，后一事件如发生，事件"有无穷多个间隔 $(n_k, n_{k+1}]$ 使对某 $n\in(n_k, n_{k+1}]$ 有 $S_n/a_{n_k}>\beta+\varepsilon$"也必须发生. 因此，为了证明(5.3.9)，只需证

$$P\Big(\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} S_n/a_{n_k} > \beta + \varepsilon, \text{i. o.}\Big) = 0.$$

根据 Borel-Cantelli 引理，这又只需证对某非降正整数列 $n_k\uparrow\infty$，

存在 $k_0\geqslant 1$ 使

$$(5.3.10)\qquad \sum_{k=k_0}^{\infty} P\Big(\max_{n_k<n<n_{k-1}} S_n > a_{n_k}(\beta+\varepsilon)\Big) < \infty.$$

取定 $\delta\in(0,\varepsilon)$. 由条件(5.3.6)知对充分大的 $n$ 有 $P(|S_n|/a_n \geqslant \delta/2) < 1/4$ 从而对每 $i\geqslant 1$,

$$P(|S_{n+i}-S_n|/a_{n+i}\geqslant\delta)$$
$$\leqslant P(|S_{n+i}|/a_{n+i}\geqslant\delta/2) + P(|S_n|/a_n\geqslant\delta/2) < 1/2.$$

于是,对充分大的 $n$ 有

$$(5.3.11)\qquad m_{n,i} := m(S_i - S_n) > -\delta a_i,\quad i > n.$$

再取定 $a\in(1,(\beta+\varepsilon)^2/(\beta+\delta)^2)$并令 $n_k=[a^k]$. 由于

$$a_{n_k}/a_{n_{k+1}} \to 1/a^{1/2} > (\beta+\delta)/(\beta+\varepsilon),$$

我们知对充分大的 $k$ 有

$$a_{n_k}/a_{n_{k+1}} > (\beta+\delta)/(\beta+\varepsilon).$$

设 $k_0$ 足够大使当 $k\geqslant k_0$ 时上式成立且

$$a^{k+1} > a^k + 1,$$

同时又使 $n\geqslant n_{k_0}$时(5.3.7)和(5.3.11)成立. 则由引理 4.4.14 推知

$$P\Big(\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} S_n > a_{n_k}(\beta+\varepsilon)\Big)$$
$$\leqslant P\Big(\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} (S_n + m_{n,n_{k+1}}) > a_{n_k}(\beta+\varepsilon) + \min_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} m_{n,n_{k+1}}\Big)$$
$$\leqslant P\Big(\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} (S_n + m_{n,n_{k+1}}) > a_{n_k}(\beta+\varepsilon) - \delta a_{n_{k+1}}\Big)$$
$$\leqslant P\Big(\max_{1\leqslant n\leqslant n_{k+1}} (S_n + m_{n,n_{k+1}}) > a_{n_{k+1}}\beta\Big)$$
$$\leqslant 2P(S_{n_{k+1}}/a_{n_{k+1}} > \beta) \leqslant 2C\exp(-\alpha\log^{(2)} n_{k+1})$$
$$\leqslant 2C\exp(-\alpha\log\log a^k) = 2C(k\log a)^{-\alpha}.$$

由此可见(5.3.10)成立. 证完.

**引理 5.3.2** 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$是独立 r. v. 列,对每 $k\geqslant 1$,$E\xi_k=0$

而且

$$\sup_{k\geqslant 1} E\xi_k^2 < \infty.$$

如果存在 $C>0$ 使

(5.3.12) $$|\xi_k| \leqslant C(n/\log^{(2)} n)^{1/2}$$

对每 $n\geqslant 1$ 成立，则

(5.3.13) $P(S_n/a_n > \beta)$

$$\leqslant \exp\{-\beta^2[2-\exp(\sqrt{2}\beta C/a^2)]\log^{(2)} n/a^2\}$$

对任 $n\geqslant 1$，$\beta>0$ 和 $a\geqslant \sup_{k\geqslant 1} E\xi_k^2$ 成立.

**证明** 由于 $n/\log^{(2)} n$ 对 $n$ 非降，故由(5.3.12)得

$$|\xi_k|/a_n \leqslant C(k/\log^{(2)} k)^{1/2}/(2n\log^{(2)} n)^{1/2} \leqslant C/(\sqrt{2}\log^{(2)} n)$$

对一切 $k=1,\cdots,n$ 成立. 但是，对任 $x\in \boldsymbol{R}$，我们有

$$e^x \leqslant 1 + x + x^2 e^{|x|}/2,$$

故对任 $\lambda>0$ 和 $a\geqslant \sup_{k\geqslant 1} E\xi_k^2$，

$$\begin{aligned} E\exp(\lambda S_n/a_n) &= \prod_{k=1}^n E\exp(\lambda\xi_k/a_n) \\ &\leqslant \prod_{k=1}^n E[1+\lambda\xi_k/a_n+\lambda^2\xi_k^2\exp|\lambda\xi_k/a_n|/(2a_n^2)] \\ &= \prod_{k=1}^n \{1+E[\lambda^2\xi_k^2\exp|\lambda\xi_k/a_n|/(2a_n^2)]\} \\ &\leqslant \prod_{k=1}^n \exp\{E[\lambda^2\xi_k^2\exp|\lambda\xi_k/a_n|/(2a_n^2)]\} \\ &\leqslant \prod_{k=1}^n \exp\{\lambda^2 a^2\exp[\lambda C/(\sqrt{2}\log^{(2)} n)]/(2a_n^2)\} \\ &= \exp\{\lambda^2 a^2\exp[\lambda C/(\sqrt{2}\log^{(2)} n)]/(4\log^{(2)} n)\}. \end{aligned}$$

由此可见，对任 $\beta>0$，$\lambda>0$，有

$P(S_n/a_n > \beta)$

$$= P(\exp(\lambda S_n/a_n) > \exp(\lambda\beta)) \leqslant \exp(-\lambda\beta) E\exp(\lambda S_n/a_n)$$

$$\leqslant \exp\{-\lambda\beta + \lambda^2 a^2 \exp[\lambda C/(\sqrt{2}\log^{(2)} n)]/(4\log^{(2)} n)\}.$$

在上式中取 $\lambda = 2\beta\log^{(2)} n/a^2$ 即得(5.3.13). 证完.

**引理 5.3.3** 设$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$i.i.d., $E\xi_1^2<\infty$. 对任意常数 $C>0$,令

$$\hat{\xi}_k = \xi_k I_{\{|\xi_k| > C(k/\log^{(2)} k)^{1/2}\}}, k \geqslant 1;$$

$$\hat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{\xi}_k, \quad n \geqslant 1.$$

则我们有

$$\hat{S}_n/a_n \to 0 \quad \text{a.s.};$$

$$E\hat{S}_n/a_n \to 0.$$

**证明** 无妨设 $C=1$(否则,以 $\xi_k/C$ 代替 $\xi_k$ 以下证明仍有效). 记 $u_k = (k/\log^{(2)} k)^{1/2}, k\geqslant 1$, 易见

$$(5.3.14) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} E|\hat{\xi}_k|/a_k = \sum_{k=1}^{\infty} E|\xi_1| I_{\{|\xi_1|>u_k\}}/a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} E|\xi_1| I_{\{u_i<|\xi_1|\leqslant u_{i+1}\}}/a_k$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} u_{i+1} P(u_i < |\xi_1| \leqslant u_{i+1}) \sum_{k=1}^{i} 1/a_k.$$

注意当 $k_0$ 充分大后,对 $i>k_0$ 有

$$\int_{k_0-1}^{i} \frac{\mathrm{d}x}{(x\log^{(2)} x)^{1/2}} = 2\int_{k_0-1}^{i} \frac{\mathrm{d}x^{1/2}}{(\log^{(2)} x)^{1/2}}$$

$$= 2\left[\frac{x^{1/2}}{(\log^{(2)} x)^{1/2}}\bigg|_{k_0-1}^{i} + \frac{1}{2}\int_{k_0-1}^{i} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}(\log x)(\log^{(2)} x)^{3/2}}\right]$$

$$\leqslant 2u_i + \frac{1}{2}\int_{k_0-1}^{i} \frac{\mathrm{d}x}{(x\log^{(2)} x)^{1/2}},$$

我们得

$$\sum_{k=k_0}^{i} 1/a_k \leqslant \int_{k_0-1}^{i} \frac{\mathrm{d}x}{(x\log^{(2)}x)^{1/2}} \leqslant 4u_i.$$

因此，存在 $M>0$ 使对一切 $i\geqslant 1$ 均有

$$\sum_{k=1}^{i} 1/a_k \leqslant Mu_i.$$

以此代入(5.3.14)，我们知对某 $M_0>0$，

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|\xi_k|/a_k \leqslant M\sum_{i=1}^{\infty} u_i u_{i+1} P(u_i < |\xi_1| \leqslant u_{i+1})$$

$$\leqslant M_0 \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 P(u_i < |\xi_1| \leqslant u_{i+1})$$

$$\leqslant M_0 E\xi_1^2 < \infty.$$

于是，由 Kronecker 引理立得 $E\hat{S}_n/a_n \to 0$；由定理 5.2.5 之命题(2)立得 $\hat{S}_n/a_n \to 0$ a.s.. 证完.

**引理 5.3.4** 设$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$i.i.d.，$E\xi_1=0$，$E\xi_1^2=1$. 如果正整数列$\{n_k,k\geqslant 1\}$和正数列$\{\alpha_k,k\geqslant 1\}$满足

$$\alpha_k = o(n_k), \quad n_k = o(\alpha_k^2), \tag{5.3.15}$$

则对任 $\varepsilon>0$ 和 $d\in \boldsymbol{R}$ 有

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{\alpha_k^2}\log P\left(\left|\frac{S_{n_k}}{\alpha_k} - d\right| < \varepsilon\right) \geqslant -\frac{d^2}{2}. \tag{5.3.16}$$

**证明** 由(5.3.15)易见当 $k\to\infty$ 时，$\alpha_k\to\infty$，$n_k\to\infty$. 对任给 $t>0$，令

$$p_k = [n_k^2 t^2/\alpha_k^2], \quad q_k = [\alpha_k^2/(t^2 n_k)]$$

(此举把$\{1,\cdots,n_k\}$分成 $q_k$ 段，每段长为 $p_k$，还剩下一段长 $n_k - p_k q_k$)以及

$$r_k = \alpha_k/(tq_k).$$

注意对任给 $-\infty<u<v<\infty$ 及 $0<\delta<(v-u)/2$，有

$$\{u < S_{n_k}/\alpha_k < v\}$$

$$\supset \{|S_{n_k} - S_{p_k q_k}| < \delta\alpha_k\} \cap \{(u+\delta)\alpha_k < S_{p_k q_k} < (v-\delta)\alpha_k\};$$

$$\{(u+\delta)\alpha_k < S_{p_kq_k} < (v-\delta)\alpha_k\}$$

$$=\{(u+\delta)tq_kr_k < S_{p_kq_k} < (v-\delta)tq_kr_k\}$$

$$\supset \bigcap_{i=1}^{q_k}\{(u+\delta)tr_k < S_{ip_k} - S_{(i-1)p_k} < (v-\delta)tr_k\}$$

(约定 $S_0=0$). 利用$\{\xi_k, k\geqslant 1\}$的 i. i. d. 性质便得

(5.3.17) $$P(u < S_{n_k}/\alpha_k < v)$$

$$\geqslant P(|S_{n_k-p_kq_k}| < \delta\alpha_k)$$

$$\cdot P^{q_k}((u+\delta)tr_k < S_{p_k} < (v-\delta)tr_k).$$

由于当 $k\to\infty$时,

$$P(|S_{n_k-p_kq_k}| \geqslant \delta\alpha_k) \leqslant ES^2_{n_k-p_kq_k}/(\delta\alpha_k)^2$$

$$= (n_k - p_kq_k)/(\delta\alpha_k)^2 \to 0,$$

我们得

$$P(|S_{n_k-p_kq_k}| < \delta\alpha_k) \to 1;$$

又由于 $r_k/p_k^{1/2}\to 1$,利用系 4.3.6 又得

$$P((u+\delta)tr_k < S_{p_k} < (v-\delta)tr_k) \to \Phi(t(v-\delta)) - \Phi(t(u+\delta)).$$

因此,注意

$$n_kq_k/\alpha_k^2 \to 1/t^2,$$

从(5.3.17)又进一步推知

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{n_k}{\alpha_k^2}\log P(u < S_{n_k}/\alpha_k < v)$$

$$\geqslant \lim_{k\to\infty}\frac{n_kq_k}{\alpha_k^2}\log P((u+\delta)tr_k < S_{p_k} < (v-\delta)tr_k)$$

$$=\frac{1}{t^2}\log[\Phi(t(v-\delta)) - \Phi(t(u+\delta))].$$

上式中令 $\delta\to 0$ 并取 $u=d-\varepsilon, v=d+\varepsilon$ 便有

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{n_k}{\alpha_k^2}\log P(|S_{n_k}/\alpha_k - d| < \varepsilon)$$

$$\geqslant \frac{1}{t^2}\log[\Phi(t(d+\varepsilon)) - \Phi(t(d-\varepsilon))], \quad t > 0.$$

但是,对任 $t>0$ 和 $\varepsilon>0$,我们有

$$\Phi(t(d+\varepsilon)) - \Phi(t(d-\varepsilon)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t\varepsilon}^{t\varepsilon} e^{-(x-td)^2/2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2d^2/2}\int_{-t\varepsilon}^{t\varepsilon} e^{tdx}e^{-x^2/2}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2d^2/2}\int_{-t\varepsilon}^{t\varepsilon} \frac{e^{tdx}+e^{-tdx}}{2}e^{-x^2/2}dx$$

$$\geqslant e^{-t^2d^2/2}[\Phi(t\varepsilon) - \Phi(-t\varepsilon)],$$

故进而得

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{a_k^2}\log P(|S_{n_k}/a_k - d| < \varepsilon)$$

$$\geqslant -d^2/2 + \frac{1}{t^2}\log[\Phi(t\varepsilon) - \Phi(-t\varepsilon)].$$

上式中令 $t\to\infty$,立得(5. 3. 16). 证完.

### 3. 3 广义重对数律

**定理 5. 3. 5** 如 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ i. i. d. ,$E\xi_1=0$,$E\xi_1^2=1$,则(5. 3. 5)成立.

**证明** 先证(5. 3. 3),即

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/a_n \leqslant 1 \quad \text{a. s. ;} \tag{5. 3. 18}$$

$$\liminf_{n\to\infty} S_n/a_n \geqslant -1 \quad \text{a. s. .}$$

但是,如果前一式已对任意满足定理条件之 i. i. d. 序列获证,那么只要把它用于 i. i. d. 序列 $\{-\xi_k, k\geqslant 1\}$ 就可得到后一式. 因此,只需证明(5. 3. 18).

对任给 $\delta>0$,取 $C>0$ 使

$$\alpha := (1+\delta)^2\{2 - \exp[\sqrt{2}(1+\delta)C]\} > 1.$$

记 $u_n=(n/\log^{(2)}n)^{1/2}$ 并令

$$\xi_k^{(1)} = \xi_k I_{\{|\xi_k|\leqslant Cu_k/2\}}, k \geqslant 1;$$

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(1)}, \quad n \geqslant 1.$$

考察独立 r.v. 序列 $\{\xi_k^{(1)}-E\xi_k^{(1)}, k\geqslant 1\}$. 由于对每 $k\geqslant 1$,

$$E(\xi_k^{(1)} - E\xi_k^{(1)})^2 \leqslant E(\xi_k^{(1)})^2 \leqslant E\xi_1^2 = 1,$$

$$|\xi_k^{(1)} - E\xi_k^{(1)}| \leqslant Cu_k,$$

故它满足引理 5.3.2 之条件. 于是我们得

$$P((S_n^{(1)} - ES_n^{(1)})/a_n > 1 + \delta) \leqslant \exp(-\alpha\log^{(2)}n), \quad n \geqslant 1.$$

注意对任给 $\varepsilon>0$,

$$P(|S_n^{(1)} - ES_n^{(1)}|/a_n > \varepsilon) \leqslant E(S_n^{(1)})^2/(a_n\varepsilon)^2 \leqslant n/(a_n\varepsilon)^2 \to 0,$$

从而

$$(S_n^{(1)} - ES_n^{(1)})/a_n \xrightarrow{P} 0.$$

我们又进而推知 $\{\xi_k^{(1)}-E\xi_k^{(1)}, k\geqslant 1\}$ 满足引理 5.3.1 的条件. 这样就得

$$\limsup_{n\to\infty}(S_n^{(1)} - ES_n^{(1)})/a_n \leqslant 1 + \delta \quad \text{a.s.}. \tag{5.3.19}$$

再令

$$\xi_k^{(2)} = \xi_k - \xi_k^{(1)} = \xi_k I_{\{|\xi_k|>Cu_k/2\}}, k \geqslant 1;$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(2)}, \quad n \geqslant 1.$$

由引理 5.3.3 立得

$$S_n^{(2)}/a_n \to 0 \quad \text{a.s.};$$

$$ES_n^{(2)}/a_n \to 0.$$

于是,由(5.3.19)推知

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/a_n$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty}(S_n^{(1)} - ES_n^{(1)})/a_n + \lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}/a_n - \lim_{n\to\infty}ES_n^{(2)}/a_n$$

$\leqslant 1 + \delta \quad$ a.s..

上式中再令 $\delta \to 0$ 即得(5.3.18). 这证明了(5.3.3).

再证(5.3.4). 由(5.3.3)可知,对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, $\{S_n(\omega)/a_n, n \geqslant 1\}$ 是有界序列,从而 $C\{S_n(\omega)/a_n\}$ 是一个闭集. 因此,为证(5.3.4),只需证任一有理数 $d \in (-1,1)$,存在子序列 $\{m_k, k \geqslant 1\}$ 使

$$(5.3.20) \qquad \liminf_{k \to \infty} |S_{m_k}/a_{m_k} - d| = 0 \quad \text{a.s.}.$$

对每 $k \geqslant 1$,令

$$m_k = k^k; \quad n_k = m_{k+1} - m_k; \quad \alpha_k = a_{m_{k+1}}.$$

不难验证这样定义的 $\{n_k, k \geqslant 1\}$ 和 $\{\alpha_k, k \geqslant 1\}$ 满足(5.3.15). 因此,由引理 5.3.4 推知:对任意 $\varepsilon > 0$,任何 $(-1,1)$ 中之有理数 $d$ 和任给之 $\delta > 0$,当 $k$ 充分大时有

$$\frac{m_{k+1} - m_k}{a^2_{m_{k+1}}} \log P\left(\left|\frac{S_{m_{k+1}-m_k}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| < \varepsilon\right) \geqslant -\frac{(1+\delta)}{2} d^2$$

从而由 i.i.d. 性质得

$$P\left(\left|\frac{S_{m_{k+1}} - S_{m_k}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_{m_{k+1}-m_k}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| < \varepsilon\right)$$

$$\geqslant \exp\left[-\frac{(1+\delta) d^2 a^2_{m_{k+1}}}{2(m_{k+1} - m_k)}\right].$$

但是,当 $k \to \infty$ 时,

$$\frac{a^2_{m_{k+1}}}{2(m_{k+1} - m_k)\log^{(2)} m_{k+1}} \to 1,$$

故当 $k$ 充分大时亦有

$$\frac{a^2_{m_{k+1}}}{2(m_{k+1} - m_k)} < (1+\delta)\log^{(2)} m_{k+1}.$$

于是,对充分大的 $k$,我们有

$$P\left(\left|\frac{S_{m_{k+1}} - S_{m_k}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| < \varepsilon\right) \geqslant \exp[-(1+\delta)^2 d^2 \log^{(2)} m_{k+1}]$$

$$= [(k+1)\log(k+1)]^{-(1+\delta)^2 d^2}.$$

这样，如果我们事先针对 $d \in (-1,1)$ 选取 $\delta>0$ 使得 $(1+\delta)|d| \leqslant 1$. 那就会得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{S_{m_{k+1}} - S_{m_k}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| < \varepsilon\right\} = \infty.$$

据 Borel-Cantelli 引理，这意味着

$$P\left\{\left|\frac{S_{m_{k+1}} - S_{m_k}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| < \varepsilon, \text{i. o.}\right\} = 1,$$

因而

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{S_{m_{k+1}} - S_{m_k}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{a.s.}.$$

由已证之(5.3.18)推知

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{S_{m_k}}{a_{m_{k+1}}}\right| \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{a_{m_k}}{a_{m_{k+1}}} \cdot \limsup_{k\to\infty}\frac{S_{m_k}}{a_{m_k}} = 0 \quad \text{a.s.},$$

故进而又得

$$\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{S_{m_{k+1}}}{a_{m_{k+1}}} - d\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{a.s.}.$$

上式令 $\varepsilon \to 0$ 便给出(5.3.20). 这样就又证得(5.3.4). 定理证完.

作为定理 5.3.5 的推论，我们得到如下的经典意义下的重对数律.

**系 5.3.6** 如 $\{\xi_k, k \geqslant 1\}$ i.i.d., $E\xi_1 = 0, E\xi_1^2 = 1$. 则(5.3.1)和(5.3.2)成立.

### 3.4 必要充分条件

设 $\{\xi_k, k \geqslant 1\}$ 是 i.i.d. 的 r.v. 序列. 如果

$$E\xi_1 = 0, E\xi_1^2 = 1, \tag{5.3.21}$$

那么重对数律和广义重对数律成立. 我们想要说明的是，对 i.i.d.

序列而言，(5.3.21)对于重对数律的成立不仅是充分的而且也是必要的.

**引理 5.3.7** 设$\{\xi_k, k\geq 1\}$i.i.d..如果

$$P(\limsup_{n\to\infty}|S_n|/a_n<\infty)>0 \tag{5.3.22}$$

成立，则必有

$$E\xi_1=0,\quad E\xi_1^2<\infty. \tag{5.3.23}$$

**证明** 由 Kolmogorov 零一律知(5.3.22)表明

$$\limsup_{n\to\infty}|S_n|/a_n<\infty \quad \text{a.s.}. \tag{5.3.24}$$

但$a_n/n\to 0$，故上式又蕴含

$$\lim_{n\to\infty}S_n/n=0 \quad \text{a.s.}.$$

由定理 5.2.16 之命题(2)，这又意味着

$$E|\xi_1|<\infty,\quad E\xi_1=0.$$

因此，为证(5.3.23)只需再证$E\xi_1^2<\infty$.用反证法.如果$E\xi_1^2=\infty$.考察$\{\xi_k,k\geq 1\}$的对称化序列$\{\xi_k^s,k\geq 1\}$.由于$E(\xi_1^s)^2=2E\xi_1^2=\infty$，故对任给$M\geq 1$，存在$C>0$使

$$E(\xi_1^s)^2 I_{\{|\xi_1^s|\leq C\}}>M^2.$$

对每$k\geq 1$，令

$$\xi_k^C=\xi_k^s I_{\{|\xi_k^s|\leq C\}}.$$

易见$\{\xi_k^C,k\geq 1\}$是 i.i.d.的 r.v.序列而且$\{-\xi_k^C,k\geq 1\}$与$\{\xi_k^C,k\geq 1\}$有相同之分布.由于

$$E\xi_1^C=0,\quad E(\xi_1^C)^2<\infty,$$

记$S_n^C=\sum_{k=1}^n\xi_k^C, n\geq 1$，由系 5.3.6 便得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n^C}{[E(\xi_1^C)^2]^{1/2}a_n}=1 \quad \text{a.s.}.$$

这表明

$$\limsup_{n\to\infty}S_n^C/a_n=[E(\xi_1^C)^2]^{1/2}>M \quad \text{a.s.},$$

从而

$$P(S_n^C/a_n > M, \text{i.o.}) = 1.$$

于是，对每 $n \geqslant 1$，记 $S_n^s = \sum_{k=1}^{n} \xi_n^s$，便有

$$\begin{aligned}P(\{S_n^C/a_n > M, S_n^s - S_n^C \geqslant 0\}, \text{i.o.}) \\ + P(\{S_n^C/a_n > M, S_n^s - S_n^C \leqslant 0\}, \text{i.o.}) \\ \geqslant P(S_n^C/a_n > M, \text{i.o.}) = 1.\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}P(\{S_n^C/a_n > M, S_n^s - S_n^C \leqslant 0\}, \text{i.o.}) \\ = P(\{S_n^C/a_n > M, S_n^s - S_n^C \geqslant 0\}, \text{i.o.})\end{aligned}$$

(见习题 4.3 之 15). 由 Kolmogorov 零一律又推知

$$P(\{S_n^C/a_n > M, S_n^s - S_n^C \geqslant 0\}, \text{i.o.}) = 1.$$

但上式蕴含

$$P(S_n^s/a_n > M, \text{i.o.}) = 1,$$

故我们有

$$\limsup_{n\to\infty} S_n^s/a_n \geqslant M, \quad \text{a.s.}.$$

由于上式中 $M$ 是任意的，进一步又得

$$\limsup_{n\to\infty} S_n^s/a_n = \infty \quad \text{a.s.},$$

与(5.3.24)矛盾. 证完.

**定理 5.3.8** 设 $\{\xi_k, k \geqslant 1\}$ i.i.d.，则下列三命题等价：

(1) (5.3.5)成立；

(2) (5.3.1)和(5.3.2)成立；

(3) (5.3.21)成立.

**证明** 由定理 5.3.5 和系 5.3.6 易见：(3)⇒(1)⇒(2). 因此只需证：(2)⇒(3). 如(2)成立，由引理 5.3.7 推知(5.3.23)成立. 记 $\sigma^2 = E\xi_1^2 (\sigma \geqslant 0)$. 如 $\sigma^2 = 0$，则对每 $k \geqslant 1$，$\xi_k = 0$ a.s. 从而

$$\lim_{n\to\infty} S_n/a_n = 0 \quad \text{a.s.},$$

与(5.3.1)和(5.3.2)矛盾．故 $0<\sigma^2<\infty$．考虑 i.i.d. 序列 $\{\xi_k/\sigma, k\geqslant 1\}$．对它用系 5.3.6 立得

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/a_n = \sigma; \quad \liminf_{n\to\infty} S_n/a_n = -\sigma.$$

再把上面两式分别与(5.3.1)和(5.3.2)比较，即得 $\sigma^2=1$．证完.

## 习　题　5.3

1．设 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ i.i.d.，其共同的 d.f. 为标准正态 d.f. $\Phi$．证明

$$\limsup_{k\to\infty} \xi_k/(2\log k)^{1/2} = 1 \quad \text{a.s.};$$

$$\liminf_{k\to\infty} \xi_k/(2\log k)^{1/2} = -1 \quad \text{a.s.}.$$

2．设 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ i.i.d.，其共同的 d.f. 是标准指数 d.f.．证明

$$\limsup_{k\to\infty} \xi_k/\log k = 1 \quad \text{a.s.}.$$

3．设 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ i.i.d.，其共同的分布是参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 分布．证明

$$\limsup_{k\to\infty} \xi_k \log\log k/\log k = 1 \quad \text{a.s.}.$$

4．设 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ 是 i.i.d. 标准正态分布的 r.v. 列．试不引用定理而直接证明：

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k/(2n\log\log n)^{1/2} = 1 \quad \text{a.s.};$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k/(2n\log\log n)^{1/2} = -1 \quad \text{a.s.}.$$

5．设 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ i.i.d.，$E\xi_1=0$，$E\xi_1^2=1$．证明：

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Big/ \Big[2\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)\log\log\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)\Big]^{1/2} = 1 \quad \text{a.s.};$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Big/ \Big[2\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)\log\log\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)\Big]^{1/2} = -1 \quad \text{a.s.}.$$

6．设 $\{\xi_k, k\geqslant 1\}$ i.i.d.，标准指数分布．证明

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n/\log n = 1 \quad \text{a.s.},$$

其中 $\eta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k, n \geqslant 1$.

7. 设$\{\xi_k,k\geqslant1\}$i. i. d. ,其共同 d. f. 为$[0,1]$上之均匀分布. 证明

$$\limsup_{n\to\infty} n(1-\eta_n)/\log^{(2)}n = 1 \quad \text{a.s.};$$

$$\liminf_{n\to\infty} n(1-\eta_n)/\log^{(2)}n = 0 \quad \text{a.s.}.$$

这里对每 $n\geqslant1$,记 $\eta_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\xi_k$.

## 第四节　Strassen 强逼近

设$\{\eta_n,n\geqslant1\}$是某概率空间上定义的一个 i. i. d. 的 r. v. 序列,满足.

$$E\eta_1 = 0;\quad E\eta_1^2 = 1. \tag{5.4.1}$$

如第四章第四节一样,构造其部分和过程 $W^{(n)}=\{W_t^{(n)},0\leqslant t\leqslant1\}$ 如下:对 $i=1,\cdots,n$,记 $S_i = \sum_{k=1}^{i}\eta_k$ ,然后令

$$W_t^{(n)} = \{S_{i-1} + [nt-(i-1)](S_i - S_{i-1})\}/n^{1/2},$$

$$(i-1)/n \leqslant t \leqslant i/n.$$

和 Donsker 关于弱收敛的不变原理类似,我们可以问:部分和过程$\{W^{(n)},n\geqslant1\}$作为 $C[0,1]$中的随机元是否按 $C[0,1]$中的距离 $d_C$ a. s. 收敛到一个 Wiener 过程. 更严格地说,问题应该提成:是否存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$,在它上面定义了一个与$\{\eta_n,n\geqslant1\}$同分布的i. i. d. 序列$\{\xi_n,n\geqslant1\}$和一个 Wiener 过程 $W=\{W_t,t\geqslant0\}$ 使

$$d_C(W^{(n)},W) = \sup_{0\leqslant t\leqslant1}|W_t^{(n)} - W_t| \to 0 \quad \text{a.s.}$$

对$\{\xi_n,n\geqslant1\}$的部分和过程 $W^{(n)}$成立?对这个问题的正面回答是如

下的 Strassen 强逼近定理.

**定理 5.4.1** 设$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$是某一概率空间上的 i.i.d. 序列，满足(5.4.1)，则存在一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$，在它上面定义着一个 Wiener 过程 $W=\{W_t, t\geqslant 0\}$和一个与$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$同分布的 i.i.d. 序列$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$使得

(5.4.2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |W_t^{(n)} - W_{nt}/n^{1/2}|/(\log\log n)^{1/2} = 0 \quad \text{a.s.}$

对$\{\xi_n, n\geqslant 1\}$的部分和过程 $W^{(n)}=\{W_t^{(n)}, 0\leqslant t\leqslant 1\}$成立.

**证明** 设 $F$ 是$\{\eta_n, n\geqslant 1\}$的共同 d.f.. 据 Skorokhod 嵌入定理(定理 3.4.1)，存在一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$，在它上面定义了一个适 Wiener 过程$\{W_t, \mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$以及$\{\mathscr{F}_t, t\geqslant 0\}$的 a.s. 有限的停时$\{\tau_n, n\geqslant 1\}$使得

(1) $\{\tau_n-\tau_{n-1}, n\geqslant 1\}$i.i.d. 且 $E\tau_1^2=1$;

(2) $\{W_{\tau_n}-W_{\tau_{n-1}}, n\geqslant 1\}$i.i.d. 且 $W_{\tau_1}\sim F$.

令 $\xi_n = W_{\tau_n} - W_{\tau_{n-1}}, n \geqslant 1$，则

$$\{\xi_n, n \geqslant 1\} \stackrel{d}{=} \{\eta_n, n \geqslant 1\}.$$

根据部分和过程的表达式(4.4.9)，为证(5.4.2)，只需分别证明

(5.4.3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |S_{[nt]} - W_{[nt]}|/(n\log\log n)^{1/2} = 0 \quad \text{a.s.};$

(5.4.4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |W_{nt} - W_{[nt]}|/(n\log\log n)^{1/2} = 0 \quad \text{a.s.};$

(5.4.5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} (nt - [nt])|\xi_{[nt]+1}|/(n\log\log n)^{1/2} = 0 \quad \text{a.s.}.$

把 Kolmogorov 强大数律用于$\{\xi_n^2, n\geqslant 1\}$，立得

$$\sum_{k=1}^{n+1}\xi_k^2/n \to E\xi_1^2 = 1 \quad \text{a.s.}.$$

因此，

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} (nt - [nt])|\xi_{[nt]+1}|/(n\log\log n)^{1/2}$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant n+1} |\xi_k|/(n\log\log n)^{1/2}$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\xi_k^2\right)^{1/2}/(n\log\log n)^{1/2}=0\quad \text{a.s..}$$

这证得了(5.4.5).

由(3.2.11)可知

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_{nt}-W_{[nt]}|/(n\log\log n)^{1/2}$$

$$\leqslant \limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_{s+t}-W_s|/(T\log\log T)^{1/2}$$

$$\leqslant \limsup_{T\to\infty}(\log T\log T)^{1/2}/(T\log\log T)^{1/2}=0\quad \text{a.s.,}$$

故(5.4.4)亦成立.

由 Kolmogorov 强大数律知

$$\tau_n/n\to 1\quad \text{a.s..}$$

记 $\Omega_0=\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n(\omega)/n=1\}$. 当 $\omega\in\Omega_0$ 时,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon,\omega)$ 使当 $n\geqslant N$ 时

$$(1-\varepsilon)n<\tau_n(\omega)<(1+\varepsilon)n$$

成立,从而

$$|W_{\tau_n(\omega)}(\omega)-W_n(\omega)|/(n\log\log n)^{1/2}$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant \varepsilon n}|W_n(\omega)-W_{n-t}(\omega)|/(n\log\log n)^{1/2}$$

$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant \varepsilon n}|W_{(1+\varepsilon)n}(\omega)-W_{(1+\varepsilon)n-t}(\omega)|/(n\log\log n)^{1/2}.$$

因此,利用(3.2.25)便得

$$\limsup_{n\to\infty}|W_{\tau_n}-W_n|/(n\log\log n)^{1/2}$$

$$\leqslant \limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant \varepsilon T}|W_T-W_{T-t}|/(T\log\log T)^{1/2}$$

$$+\limsup_{T\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant \frac{\varepsilon T}{1+\varepsilon}}|W_T-W_{T-t}|/\left(\frac{T}{1+\varepsilon}\log\log\frac{T}{1+\varepsilon}\right)^{1/2}$$

$$\leqslant 2(2\varepsilon)^{1/2}\quad \text{a.s.}$$

对任给 $\varepsilon>0$ 成立. 在上式中令 $\varepsilon\to 0$,我们得

$$|W_{\tau_n}-W_n|/(n\log\log n)^{1/2}\to 0\quad \text{a.s..}$$

注意$(n\log\log n)^{1/2}\uparrow\infty$，由此不难进一步推出

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|S_{[nt]}-W_{[nt]}|/(n\log\log n)^{1/2}$$
$$=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|W_{\tau_k}-W_k|/(n\log\log n)^{1/2}\to 0\quad \text{a.s.}.$$

(5.4.3)得证. 定理证完.

利用强逼近定理可以干许多事情. 例如，沿用第三章第三节的符号，我们可以得到 i.i.d. 部分和过程的如下形式的重对数律——一般称之为 Strassen 的不变原理.

**定理 5.4.2** 设$\{\eta_n,n\geqslant 1\}$是满足(5.4.1)的 i.i.d. 序列，以$\{\hat{W}_t^{(n)},t\geqslant 0\}$记其部分和过程并令

$$\hat{\chi}_n(t)=\hat{W}_t^{(n)}/(2\log\log n)^{1/2},\quad 0\leqslant t\leqslant 1,n\geqslant 1.$$

则

$$C(\{\hat{\chi}_n\})=\mathscr{K}\quad \text{a.s.}.\tag{5.4.6}$$

**证明** 由定理 5.4.1，存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，在它上面定义有 Wiener 过程$\{W_t,t\geqslant 0\}$和与$\{\eta_n,n\geqslant 1\}$同分布的 i.i.d. 序列$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$使(5.4.2)对$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的部分和过程$W^{(n)}$成立. 又由 Wiener 过程的重对数律(定理 3.3.3)知

$$C(\{\zeta_n\})=\mathscr{K}\quad \text{a.s.}$$

其中$\zeta_{n,t}=W_{nt}/(2n\log\log n)^{1/2}$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 因此，记

$$\chi_{n,t}=W_t^{(n)}/(2\log\log n)^{1/2},\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

便进而得

$$C(\{\chi_n\})=\mathscr{K}\quad \text{a.s.}.$$

由于$\{\hat{\chi}_n,n\geqslant 1\}$与$\{\chi_n,n\geqslant 1\}$同分布，故上式意味着(5.4.6)亦成立. 证完.

应该指出，(5.4.6)是一个比(5.3.5)更强的结论，因而把定理 5.4.2 和定理 5.3.8 结合在一起，我们可以得到下列关于 i.i.d. 序列的完整叙述.

**定理 5.4.3** 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是 i.i.d. 序列，$\{S_n,n\geqslant 1\}$和$\{W^{(n)}$，

$n\geqslant 1\}$分别记$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$的部分和序列及部分和过程序列，则下列说法等价：

(1) $C(\{W^{(n)}/(2\log\log n)^{1/2}\})=\mathscr{K}$ a.s.；

(2) $C(\{S_n/(2n\log\log n)^{1/2}\})=[-1,1]$ a.s.；

(3) (5.3.1)和(5.3.2)成立；

(4) $E\xi_1^2=0,E\xi_1^2=1$.

**证明** 由定理5.3.8和定理5.4.2，只需证明(1)⇒(2)，而这一点读者请作为习题完成.

## 习 题 5.4

1. 设$\{\xi_n,n\geqslant 1\}$是一r.v.序列，$\{S_n,n\geqslant 1\}$和$\{W^{(n)},n\geqslant 1\}$分别是其部分和序列及部分和过程序列.证明：如

$$C(\{W^{(n)}/(2\log\log n)^{1/2}\})=\mathscr{K}\quad \text{a.s.},$$

则

$$C(\{S_n/(2n\log\log n)^{1/2}\})=[-1,1]\quad \text{a.s.}.$$

2. 证明：如$\{\xi_k,k\geqslant 1\}$i.i.d.且$E\xi_1=1$，则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|S_{[nt]}/n-t|\xrightarrow{P}0.$$

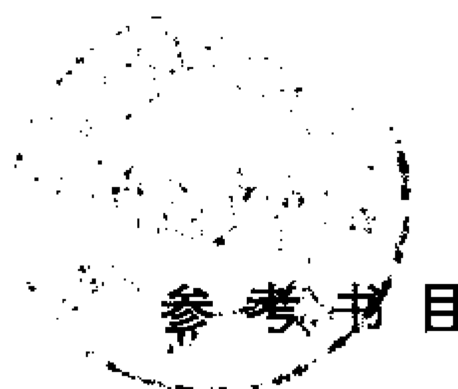
3. 设$\{\eta_n,n\geqslant 1\}$i.i.d.满足$E\eta_1=0$和$E\eta_1^2=1$.以$\{\hat{W}^{(n)},n\geqslant 1\}$记其部分和过程序列.用Skorokhod嵌入定理证明：存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，在它上面定义着一个Wiener过程$\{W_t,t\geqslant 0\}$和一个过程列$\{W^{(n)},n\geqslant 1\}$使得

$$\{W_t^{(n)},0\leqslant t\leqslant 1\}\stackrel{d}{=}\{\hat{W}_t^{(n)},0\leqslant t\leqslant 1\},\quad n\geqslant 1;$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|W_t^{(n)}-W_t|\xrightarrow{P}0.$$

4. 利用习题2和3证明Donsker不变原理：对$C[0,1]$到$\boldsymbol{R}$的每一连续泛函$h$，

$$h(W^{(n)})\xrightarrow{d}h(W).$$



# 参考书目


1. P. Billingsley, Convergonce of Probability Measure. John Wiley & sons, New York (1968).
2. Y. S. Chow & H. Teicher, Probability Theory, second edition, Springer-Verlag, New York (1988).
3. M. Csörgö & P. Révész, Strong Approximation in Probability and Statistics, Academic Press, New York (1981).
4. P. Hall & C. C. Heyde, Martingale Limit Theory and its Application, Academic Press, New York (1980).
5. 陆传荣、林正炎、陆传赉,《概率极限理论引论》,高等教育出版社(1989).
6. W. F. Stout, Almost Sure Convergence, Academic Press, New York (1974).
7. 严士健、王隽骧、刘秀芳,《概率论基础》,科学出版社(1982).